本格数学練習帳 3

ヒルベルトの忘れられた問題

本格数学練習帳 3

ヒルベルトの忘れられた問題

D. フックス
S. タバチニコフ
蟹江幸博 訳

岩波書店

MATHEMATICAL OMNIBUS
Thirty Lectures on Classic Mathematics

by Dmitry Fuchs and Serge Tabachnikov

First published 2007
by American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

This Japanese edition published 2013
by Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo
by arrangement with
American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Photo and Art credits:

- Emil Borel (Lecture 1), David Hilbert (Lecture 19, 22), Jean-Victor Poncelet (Lecture 29), Hassler Whitney (Lecture 12): Reproduced by permission of Gerald Alexanderson
- Syamadas Mukhopadhyaya (Lecture 10): Reproduced by permission of the Calcutta Mathematical Society
- Drawings of Morgan Crofton (Lecture 19) and Max Dehn (Lecture 22) by Anatoly Dverin: Reproduced by permission of Anatoly Dverin
- Freeman Dyson (Lecture 3): Reproduced by permission of Freeman Dyson
- Emmanuel Ferrand (Lecture 12): Reproduced by permission of Emmanuel Ferrand
- Étienne Ghys (Lecture 10): Reproduced by permission of Étienne Ghys
- James Alexander (Lecture 26): Photographer unknown. Photograph courtesy of Alexander Family. From The Shelby White and Leon Levy Archives Center, Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, USA.
- Askold Khovanskii (Lecture 6): Reproduced by permission of Askold Khovanskii
- Greg Kuperberg (Lecture 2): Reproduced by permission of Greg Kuperberg
- Article "Cusps" (slightly edited version): © 2011 by Mathematical Association of America / Reprinted by permission of Mathematical Association of America. All rights reserved.
- John Milnor (Lecture 19): Reproduced by permission of John Milnor
- Oded Schramm (Lecture 21): Reproduced by permission of Yuval Peres, Microsoft Research, Redmond.
- Richard Schwartz (Lecture 29): Reproduced by permission of Richard Schwartz
- A. S. Schwarz (Lecture 2): Reproduced by permission of Albert S. Schwarz
- Godfrey Harold Hardy (Lecture 3), Srinivasa Ramanujan (Lecture 3), Ian MacDonald, Adolf Kneser, Beniamino Serge (Lecture 10), Rene Thom (Lecture 10, 19), Wilhelm Blaschke, Shiing-Shen Chern (Lecture 18), Istvan Fary, George Hamel (Lecture 19), Alfred Tarski (Lecture 19), Carl Friedrich Gauss (Lecture 20), John Conway (Lecture 23), Isaac Schoenberg (Lecture 24), Robert Connelly, Klaus Steffen (Lecture 25), Misha Gromov, Morris Hirsch, Mark Krasnoselsk, Nicolas Kuiper, Stephen Smale (Lecture 27), Roger Penrose (Lecture 28) : Reproduced by permission of Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach GmbH, Oaberwolfach-Walke, Germany.

はじめに

> 2000 年以上もの間，数学にある程度親しむことがすべての教養ある人間にとって欠くことのできない知的装備の一部分と見なされてきた．ところが今日，教育におけるこの伝統的な地位が重大な危機にさらされている．

古典的な書物『数学とは何か』初版の序文のこの書き出しは，1941 年にリチャード・クーラントによって書かれたものである．現代に特有だと思われがちな問題が，65 年前にも(そしておそらくはもっと古くから)同じように深刻だったと分かると，少し肩の力も抜ける思いがする．地平線上に雲の一つもなくなるとまでは言えないが．私たち著者は本書によって数学文化の継続にほどほどの貢献ができればと希望している．

私たちの数学ヒーローの一人であるヴラジーミル・アーノルドが 12 歳のときに読んだ最初の数学の本は，ハンス・ラーデマッヘルとオットー・テプリッツの『数と図形』[*1]であった．1990 年に出版された雑誌『クヴァント』[*2]へのインタヴューで，1 日に数ページというゆっくりとしたペースでこの本を勉強したと，アーノルドは回想している．私たちの本が，誰か未来の傑出した数学者の数学的進歩において，同じような役割を果たしてくれることを願わずにはいられない．

この本が，高校生から熟練の研究者までの，数学を愛するすべての人の興味を引くようになることを望んでいる．易しい道程であることは約束しない．結果の多くには証明をつけた．議論の細部まで追究するには，読者はかなりの努力が要るだろう．努力の見返りとして，少なくとも時には，読者はテーマの調和に対する畏敬の念に満たされることになるだろう(このことを感じるから，

[*1] [訳註]1930 年に出版されたドイツ語の本で，山崎三郎と鹿野健による日本語訳が，1989 年に日本評論社から出版されている．

[*2] [原註]ロシア語だが，バックナンバーはサイト http://kvant.mccme.ru/で見ることができる．

多くの数学者は研究に駆り立てられるのである！）．G.H. ハーディの『一数学者の弁明』*[3]から引用しよう．

> 数学者の規範は，画家や詩人がそうであるように，**美**である．アイデアは，色や言葉と同じように，調和良く組み合っていなければならない．美が第一の試金石である．世界には，醜い数学に恒久的な居場所はないのである．

私たちにとっても，美は研究テーマを選ぶ際の第1の試金石である．通俗的な記事や講演のテーマを選ぶ際もそうだったし，その結果，本書の題材を選ぶ際もそうであった．どんな特定の分野(たとえば，数論や幾何)にも限定することはしなかった．強調したかったのは，数学が多様であり，一体であるということである．もしこの本を読んだ後で，読者が特定の領域のもっと体系的な解説に興味を持ったなら，参考文献のリストは良い情報源になるだろう．

副題*[4]について述べておこう．「古典的(クラシック)」という言葉は，辞書的には「長い期間，その分野で最高の質を持ち，傑出していると判断される」と定義される．この厳格な基準を満たす数学を選ぶよう努めた．ここで読者が出会うのは，アイザック・ニュートン，レオンハルト・オイラー，オーギュスタン・ルイ・コーシー，カール・グスタフ・ヤーコブ・ヤコビ，ミシェル・シャール，パフヌートゥイ・チェビシェフ，マックス・デーン，ジェイムズ・アレクサンダー，その他の過去の偉大な数学者たちの定理である．ローバート・コネリー，ジョン・コンウェイ，ヴラジーミル・アーノルドといった，卓越した現代数学者の最近の結果には何度も触れている．

本書には400ほどの図がある．百聞は一見に如かずという格言は，本当にその通りだと思う．本書の図は数学的に正確である．だから，3次曲線はある3次方程式を満たす点の軌跡としてコンピュータで描いてある．特に，幾何の研究における実験道具として，精確な描画の重要性を示している図が第29講の2つの例である．最近1970年代になって正確な描画によって発見されたマ

---

*[3] [訳註]1940年に出版された英語の本で，柳生孝明による日本語訳『ある数学者の生涯と弁明』が，1994年にシュプリンガー・ジャパンから出版されている．

*[4] [訳註]これは，本書の原題 *Mathematical Omnibus —Thirty Lectures on Classic Mathematics* について述べている．

ネー=クーツの定理と，ポンスレのグリッドについてのリチャード・シュワルツのごく最近の定理である．シュワルツはコンピュータ実験によってこの定理を発見した．実験道具としてコンピュータを使ったもう1つの例が第3講にある(「特別な指数」の議論を参照)．

私たちは，各講義の長さや難しさのレベルを均一にしようとはしなかった．極めて長く入り組んだ講義もあれば，短くて軽めなものもある．「カスプ」の講義はもっとも特徴的である．この講義には証明はなく，多くの例があるだけで，それが豊富な図で説明されている．これらの例の多くは他の講義で厳密に扱われる．講義はそれぞれ互いに独立であるが，いくつかのテーマは本書のあちこちに出没している．予備知識についてはあまり仮定してはいない．標準的な微積分はほとんどの場合に用いているが，その計算さえ必要としないことも多い(このように壁が低くなっていて，数学が好きならば高校生の挑戦も拒んではいないのである)．また，どんなに教育のある読者にも，ほとんどすべての講義の中で驚きを感じてもらえるものと信じている．

本書には200ほどの演習問題がある．その多くには解法と解答が与えてある．演習問題は，講義の中で述べた話題をさらに発展させたものである．多くの場合，より高度な数学を含んでいる(その場合には，解法の代わりに，参考文献のリストにある文献を引用する)．より難しい演習問題には，難度に応じて星印を1つまたは2つ付した．

本書は，私たちがロシアの『クヴァント』誌に1970年から1990年までに書いたかなり多くの記事と，ソビエト連邦やアメリカ合衆国(1990年以降ここに住んでいる)において，さまざまな聴衆に対して行った多くの講演をもとにしている．その聴衆の中には，2001年と2002年のカナダおよびアメリカ合同の数学キャンプに参加した理数系の高校生や，2000年から2006年にかけてペンシルヴァニア州立大学におけるMASS[*5]に出席した大学生，カリフォルニア大学バークレイ校で行われた湾岸地域数学サークルに，教師や父兄と一緒に出席した高校生が含まれている．

本書は，大学生用の数学セミナー(通年のコースには十分すぎる題材がある

[*5] [訳註]Mathmatics Advanced Study Semester(高度数学学習学期)

が)や，さまざまな題材のコース，高校やカレッジでの数学クラブで使用することができる．パラパラめくってみるだけでも楽しめるようにもなっているし，紙と鉛筆を持ってたくさんある魅力的な問題に挑戦すれば，数学する楽しみが味わえるようにもなっている．

この序文を引用で始めたので，お終いにもう1つ引用をしよう．その定理が一度ならず登場するマックス・デーンは1928年の記事[22]で次のように数学を特徴づけている．その言葉は本書の主題に適用できると私たちは思っている．

> ときに，数学者は，詩人や征服者の情熱を持つ．その議論の厳密さは責任ある政治家の，もしくはより単純に，教育熱心な父親の厳格さであり，その寛容さと諦念は古の賢人のそれである．数学者は革命的であり，保守的であり，懐疑的であり，そしてきっぱりと楽天的である．

謝辞. 本書を，彼の70歳の誕生日の機会に，V.I. アーノルドに捧げる．彼の数学研究と解説のスタイルは長年にわたって著者たちに大きな影響を与えてくれた．

私たちは，2005年と2006年の2年間，オーベルヴォルファッハ数学研究所(MFO)の「2人研究」プログラムに参加した．私たちはこの数学者のパラダイスに非常に感謝している．ここでは，管理者と料理人と自然が協力して，研究者の創造性を高めてくれる．MFOでの滞在がなかったなら，このプロジェクトの完成はかなり先のことになっていただろう．

著者タバチニコフはまた，ボンのマックス・プランク研究所の変わらぬもてなしに感謝している．

ジョン・ダンカン，セルゲイ・ゲリファント，ギュンター・ツィーグラーに多くの感謝を捧げたい．彼らは原稿を最初から最後まで読み通してくれ，彼らの詳細なコメントや批判(しかもほとんど重ならないものだった！)は大いに本書の説明を改善してくれた．

カリフォルニア大学デーヴィス校とペンシルヴァニア州大学にて
2006年12月

訳者まえがき

簡単な練習問題の本だと思って中をパラパラと見たら，難しそうに思えるかも知れません．でも少し待ってください．実は，パラパラと見ただけで素晴らしさが分かる人は，数学の達人レベルの人だと言えるくらいの本なのです．

この本のどの講義も，最初の数ページは高校生にも理解できるもので，見慣れた街を散歩する感じでしょうが，読み進んでいくと，高校や大学の教科書では出会わないような風景の中にいることに気づくことになります．よく知っている数学的知識のすぐそばに，こんなにも豊かな世界があったのかと驚いたり，そういう世界を歩き回っていた多くの先人がいたことが分かるでしょう．数学を学んだ日が遠くなりはしても，数学の達人だったことのある読者だったら，この本を読むことで海外旅行のような楽しさを味わうことができるでしょう．

しかし，この本は数学の達人や昔の達人のためだけのものではありません．パラパラと読むだけで本書の素晴らしさや面白さが分からなくてもいいのです．そういう人にこそ，この本を読んでもらいたいのです．

議論そのものや証明が読者に委ねられているところが少なくありません．演習問題もたくさんありますが，解答はあったりなかったりします．そういうところを自分で解決しないと面白さが分からないのです．著者たちは，読者が自分で問題を解こうとすることを願っているのです．

練習帳は問題を解かないと，練習帳としての意味がありません．解いてみて，いや，解く努力をして，解けた時も，そして解けなかった時もその努力が積み重なって，(隠れた)実力を培っていくのです．

この本の問題にはそういう力があります．ですから，斜めに読むだけでなく，紙とペンをいつもそばに置いて，少しでも分からないところがあったら，計算したり，絵を描いたり，問題全体の概念図を書いたりしてみましょう．

難しいと思えるところは，本当に難しい，つまり誰にとっても難しいのか，

貴方のこれまでの学習履歴のせいで難しいだけなのか分かりません．後者なら，本書を考えながら読んでいくうちに分かってくるように，本書はできています．まずは考えてみましょう．しばらく考えて分からなかったら，諦めるというのではなく，一時棚上げにして，先に進んでください．先の方にそれに関する考察が書いてあることもあるでしょう．そんなときは，難しいと感じた貴方の感性が正しかったということです．前に自分で考えてあれば，そこでその考察を読むときにはより深い理解が得られるでしょう．

易しそうに見える問題も，実際に解いてみてください．易しい問題なら，見ただけで分かったと思うこともあるでしょう．最初はそれでも構いません．でも時間に余裕があるなら，きちんとした解答を書いてみてください．そうすると，分かったつもりだった解答に論理のギャップがあることに気がついたり，解答だと思っていたことが間違っていたことに気がつくかも知れません．

本書の原題のサブタイトルが『古典数学30講』であるように，扱っているテーマはすべて古典的なものです．古いというのではなく，クラシック，つまり本物であり，本格なのです．絵の良さが分かるためには一流の絵に触れるしかないように，よい数学が分かるためには，一流の数学を学ぶ必要があります．本書には，そういう本格的な数学が，誰にも鑑賞できる形で詰まっています．

本書を読み進めば，序文にもあるように，アーノルドのようになれるかも知れません．大学生の頃にヒルベルトの問題の1つを解いて颯爽と学界に登場した彼も，そうやってこの種の本をじっくりと読み進んでいったのです．

フックスはアーノルドを自分の数学ヒーローと呼んでいますが，訳者にとってもヒーローです．彼の初期の大きな業績に太陽系の安定性に関するものがあって，訳者は修士の学生の時それを学び，後に関連した『古典力学の数学的方法』という著書をロシア語から翻訳したことがあります(岩波書店刊)．そのこともあり，アーノルドに会いたくてモスクワ大学に留学したことがあります．

また訳者が博士課程の時に勉強した，ベクトル場の作る無限次元リー環のコホモロジー論を創始したのが，I.M. ゲリファントとフックスです．モスクワ大学ではアーノルドの講義やセミナーにも出ましたが，ゲリファントのセミナーにも出ていました．ゲリファントのセミナーには多くの有名な数学者が集まってきていましたが，公的には学生用のセミナーでした．訳者が出席した当

時，そのセミナーの進行役をしていたのがフックスだったのです．

訳者にとって，アーノルドとフックスが大切な人であり，彼らの精神が満ち溢れている本書はとても良い本です．今世紀の数学における名著と言ってもいいくらいです．この本を翻訳することはとても名誉なことと思い，丁寧に翻訳したつもりです．

さて，本書の構成について述べておきましょう．

原書は大きく2つのパートに分かれています．日本語版の第1巻では，第1部の「代数と算術」を収録し，第2巻と第3巻は，原書の第2部「幾何とトポロジー」を前半と後半に分けて収録しています．

なお，原書では全部で30の講義を8つの章に分けていますが，日本語版では章による分類はしませんでした．章は大雑把に内容をまとめる意味しかなく，各講義はほとんど独立して読みかつ楽しむことができ，どの講義から読んでもいいようになっているからです．他の講義での知識が必要になる場合にも，必要箇所がきちんと明示されているので，心配はありません．

数式や定理や命題などに番号がついています．(4.5)式は第4講の5番目の式という意味です．また，定理と系が1つのグループ，また命題と補題と注意が1つのグループとして，各講義の中での通し番号が付けられているので注意してください．

各講義の終わりに掲載されている数学者の肖像については，出典からの許可が得られないために差し替えたものがあります．

本文の記述や，演習問題などで，原著の明らかなケアレスミスや思い込みについては，一々脚註などで断らずに直したものがあります．しかし，訳者の勘違いやタイプミスなどが混入している可能性があります．それに気がついた読者は，訳者か出版社に知らせていただければ，増刷時などに改訂していきたいと考えています．言葉遣いなどでもより適正なものに変えていきたいし，訂正予定のデータは，訳者のHPの本書に関するサイトに随時アップする予定です．

2012年7月

蟹江幸博

目　次

【第 1 巻目次】

【第 2 巻目次】

第20講 曲率と多面体

20.1 平面では

滑らかな平面曲線の曲率は，点が単位の速さで曲線に沿って動くときに，接線の回転する比率であった*1．では，折れ線の曲率はどのように定義したらよいのだろうか？

平面の楔(くさび) α*2の曲率は，その**不足量** $\pi-\alpha$，つまり，補角の大きさと定義される．角が小さいほど，曲率は大きくなる．折れ線の曲率は，折れ線の角の曲率の和であるとする．

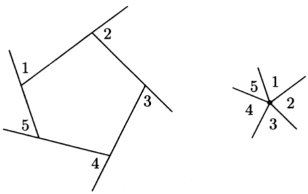


図 20.1 凸多角形の外角の和

凸多角形の外角の和は 2π である(図 20.1 参照)．図 20.2 に図示された 2 つの 7 岐星と呼ばれる折れ線の曲率の和は，それぞれ 4π と 6π である．

20.2 多面錐の曲率

多面錐*3の各面に対し，錐の頂点での角を考えよう．この角を**平坦角**とい

---

*1 [訳註]第 2 巻 10.2 節参照．

*2 [訳註]平面の楔は 1 点を端点とする 2 つの半直線で囲まれた角領域のことで，領域の内角 α で表している．第 2 巻 11.2 節参照．

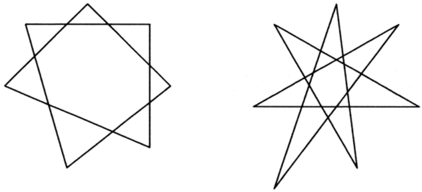


図 20.2　2つの7岐星

う．平坦角が $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ の多面錐を考える．多面錐の曲率を不足量 $2\pi-(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)$ のことと定義する．曲率は正にも負にもなり得ることに注意すること．もしも多面錐が平坦ならその曲率は0になる．

もしも多面錐の面の数が3より大きければ，多面錐の形を変えることができる．曲げられない平面の楔である面が，稜のところで蝶番(ちょうつがい)で繋がっていると想像しよう．すると，面自体は延びも縮みもせずに，多面錐を変形することができるが，面の間の2面角は変わることになる．そのような変形では，多面錐の曲率は一定で，変わらない．

P を凸な多面体とする．

補題 20.1　P のすべての頂点の曲率の和は 4π である．

証明▶ v, e, f をそれぞれ P の頂点と稜と面の数とすると，これらの数はオイラーの公式 $v-e+f=2$ を満たす(証明は第24講を参照)．

P の面のすべての角の和 S を計算しよう．頂点では，角の和は，2π からこの頂点の曲率を引いたものである．頂点について足しあわせると

$$S = 2\pi v - K$$

となる．ここで，K は全曲率[*4]である．一方で，面について足すことによっても，角の和を求めることができる．i 番目の面の角の和は，この面の稜の数

[*3] [訳註]ある多角形(底面という)とその平面上にない点(錐の頂点という)に対し，頂点から底面の各点を通る半直線全体で作られる図形のことである．多面錐の面はある平面の角領域になっている．多面錐を平面で切った切り口を別の底面としても同じ多面錐が得られ，底面は一意的ではない．

[*4] [訳註]全曲率の定義は第2巻第19講にある．

を n_i とすると，$\pi(n_i-2)$ である．それゆえ，

$$S = \pi(n_1+\cdots+n_f)-2\pi f$$

となる．あらゆる稜は2つの面と隣り合っているので，$n_1+\cdots+n_f=2e$ となり，したがって

$$S = 2\pi e-2\pi f$$

となる．こうして $2\pi v-K=2\pi e-2\pi f$ となり，オイラーの公式と合わせると，求める結果 $K=4\pi$ が得られる．◀

補題20.1の類似は凸でない多面体に対しても成り立つし，さらに球面と位相同値とは限らないような多面体曲面(たとえばトーラス)に対しても成り立つ．それは，全曲率が $2\pi\chi$ となるというものである．ここで，$\chi=v-e+f$ は**オイラー標数**である．補題20.1と同じように証明することができる．

20.3　双対錐と球面多面体

凸な多面錐 C が与えられたとき，頂点 V を通る C の各面への外向き法線を考える．これらの直線は，C の**双対**錐と呼ばれる，凸な多面錐 C^* の稜になっている．平面で同様の構成をすると，元の角の π に関する補角が得られる．空間での多面錐とその双対錐との関係はもっと複雑で，次の補題で述べられるようなものになる．

補題 20.2　C^* の稜の間の角は，C の2面角の π に関する補角である．そして，C^* の2面角は，C の稜の間の角の π に関する補角である．

証明▶ 最初の主張は図20.3から明らかで，2つ目の主張は C と C^* の間の関係の対称性から明らかである．◀

ここからは，球面幾何についての議論をする．ユークリッド平面を(単位)球面に置き換えるのは自然なことである．なんと言っても，地球の表面は(近似的に)球面なのだから[*5]．直線の役割をするのは大円であり(平面とは違っ

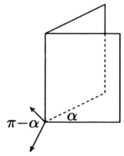


図 20.3　補題 20.2 の証明

て，このようなどんな 2「直線」も 2 点で交わる)，球面多角形は大円の弧で囲まれている．任意の曲面上での直線の対応物が何かという点については，第 20.8 節まで待っていただくことになる．点 X で交わる 2 つの大円の間の角は，X での球面の接平面の中での大円の接線の間の角として定義される．

相似がないというのは球面幾何の独特な性質である．特に，角の大きさを保ったまま多角形を膨張させて，面積を変えることはできない．もっと正確に言うなら，球面多角形の面積はその角によって決まってしまうのである．

定理 20.1　P を単位球面上の凸な n 角形であるとし，A をその面積，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ をその角とすると，

$$A = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n - (n-2)\pi \tag{20.1}$$

となる．

平面 n 角形に対しては，(20.1)式の右辺が 0 になることに注意しておく．

証明▶ $n=2$ から始めよう．二角形は，両極を結ぶ 2 本の子午線によって囲まれる領域である．α が子午線の間の角であれば，二角形の面積は球面の全面積である 4π の $\alpha/2\pi$ 倍，つまり，2α である．

次に球面三角形を考える(図 20.4 参照)．3 つの大円は 6 つの二角形を作り，球面はそれらで覆われている．元の三角形とその対蹠点の作る三角形はそれぞれ 3 回覆われるが，球面のその残りの部分は 1 回しか覆われない．6 つの二角

*5　[原註]球面幾何は既に古代ギリシャ人に知られていた．平面幾何の多くの結果には球面での類似がある．たとえば，球面正弦法則や球面余弦法則がある．

形の全面積は $2(2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3)$ となるから，

$$4(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = 4\pi+4A$$

となる．これから，$n=3$ に対する主張が得られる．

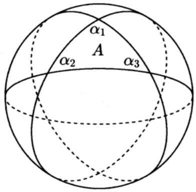


図 20.4　球面三角形の面積

最後に，$n \geqq 4$ のときは，あらゆる凸 n 角形は対角線によって $n-2$ 個の三角形に切り分けることができる．面積と角の和は切り分けることに関して加法的であり*6，そのことから(20.1)が従う．◀

結果として，凸な多面錐 C の曲率は球面多角形の面積と解釈できることを説明しよう．C^* をその双対錐とし，その頂点を中心とする単位球面を考える．C^* と球面との交わりは凸な球面多面体 P である．P の面積は多面錐 C^* の立体角を測ったものになっている．

系 20.2　球面多面体 P の面積 A は多面錐 C の曲率に等しい．

証明▶ P の辺の数が n であると仮定し，α_i をその角とする．P の面積は(20.1)式で与えられる．

角 α_i は C^* の 2 面角である．β_i を多面錐 C の稜の間の角とする．補題 20.2 により $\alpha_i=\pi-\beta_i$ である．(20.1)式に代入すると，

*6 [訳註]対角線による切り分けだから頂点が増えないことに注意する．

$$A = 2\pi - (\beta_1 + \cdots + \beta_n)$$

が得られる．右辺は多面錐 C の曲率であり，系の主張が得られる．◀

系 20.2 は補題 20.1 の別証を与えている．P のすべての頂点における双対錐を原点に移動させることができ，そうするとそれらの多面錐は空間全体を覆う（図 20.5 参照）．それぞれの球面多角形の面積の和は 4π であり，補題 20.1 が導かれる．この別証と補題 20.1 の議論と合わせれば，オイラーの公式も導くことができる．

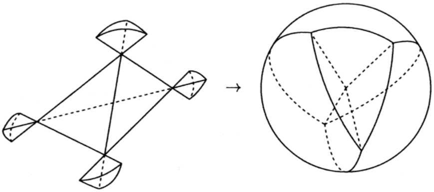


図 20.5　凸多面体の曲率の和

20.4　平行移動と回転

多面体 P 上の**平行移動**を定義しよう．移動させたいのは，多面体のある面に含まれるベクトルである．それを v とする．1 つの面の中にある限り，v の平行移動は平面での平行移動と同じである．稜を越えてベクトルを動かそうとすると問題が起きる．

F_1 と F_2 を稜 E を共有する隣接する面とする．（蝶番によって結ばれているように）E の周りを回転させて，2 つの面が含まれる平面を一致させる．接ベクトル v を F_1 の内部で平行移動する．v の始点（足）が稜 E に到達したら，この回転を使えば F_2 の中にあるベクトル u が得られる．ベクトル u を，稜 E を越えて v を平行移動した結果であるとする．

別の言い方をすれば，稜 E を越えて v を平行移動するとき，E に沿った v の接成分と法成分は同じままである．立方体の 3 つの隣接する稜を越えたベ

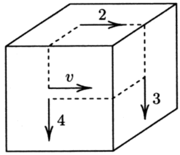


図 20.6　立方体上の平行移動

クトルの平行移動を想像しながら，図 20.6 を見てみよう．

上に述べたことと同じことだが，面 F_1 が水平面上にくるように P を置き，稜 E を水平面に接地させたまま回転させると，今度は面 F_2 が水平面上にくる．ベクトル v と u が水平面上に残す跡は平行である．こうして，多面体の上の平行移動は，水平面上でこの多面体を転がすのと同じことになる．

測地線 γ は，各面の内部では直線であり，γ が稜と交わるところでは γ の接ベクトルが上の意味で平行移動になっているような，多面体上の曲線のことと定義する．測地線は頂点を通らないものと仮定する．現実的なイメージとしては，測地線は，チョコレートの箱の包装のテープのようなものと思えばよい．平面上を多面体が転がると，測地線は直線の跡を残す．

測地線は十分近い 2 点の間の距離を最小にするものである．

補題 20.3　空間の中で，直線 E に沿って交わる 2 つの平面 F_1 と F_2 を考え，A_1 と A_2 をそれぞれ F_1 と F_2 の中の点とする．2 つの平面を E によって分けた半平面(A_1 と A_2 が載っている方)で多面体的な曲面を考え，γ を A_1 から A_2 に至る最短の道で稜 E と交わるものとする．そのとき，γ は測地線である．

証明▶ 平面 F_2 を稜 E の周りで回転し，平面 F_1 と一致させる．A_1 から A_2 への最短な曲線 γ は伸ばされて直線分となる．したがって，γ の単位接ベクトルは稜 E を越えて平行移動されている．◀

20.5　ガウス=ボネの定理

V を多面錐 C の頂点とする．多面錐の 1 つの面の中にあるベクトルを考え

る．ベクトルの足を始点として，V の周りを反時計回りに 1 周するような，錐の曲面上の閉じた道を考える．ベクトルをこの道に沿って平行移動させると，何が起こるだろうか？　点は元の足の位置に戻り，ベクトルはある角 α だけ回転する．角 α はベクトルの取り方にも道の取り方にもよらない．この角はどれくらいの大きさになるだろうか？

補題 20.4　角 α は C の曲率である．

証明▶ 平行移動をする代わりに，水平面上に C を置いて，道に沿って次々と稜を越えて転がす．多面錐を平面の上に展開して得られる楔の大きさは C の平坦角の和になる．問題の角 α は，この角の 2π に関する補角であり，C の曲率となる（図 20.6 と 20.7 を参照）．◀

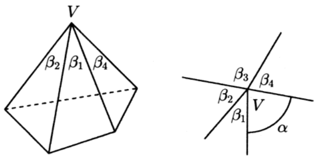


図 20.7　補題 20.4 の証明のために

もっと一般に，γ を多面体 P 上の向きづけられた単純閉道[*7]とする．γ は稜に横断的に交わり[*8]，頂点を避けて通ると仮定する．曲線 γ は P を右と左の 2 つの成分に分割する[*9]．左の方を γ によって囲まれた領域ということにする．ベクトル v を，足が γ 上にあるように選び，それを γ に沿って平行移動させる．u を最後のベクトルとすると，その足は v の足と一致する．v と u の間の角を $\alpha(\gamma)$ と書く．次の結果は**有名なガウス=ボネの定理**（の多面体版）である．

[*7] ［訳註］自己交差を持たない曲線を単純であるといい，始点と終点が一致する曲線を閉曲線という．曲線上を動く点を意識するとき，曲線を道または路ということが多く，単純閉曲線や単純閉路といっても同じものである．

[*8] ［訳註］γ が稜に接しないように交わること．交点での 2 曲線の接線が一致しないことといってもよい．

[*9] ［訳註］γ の向きに従って左右を考える．

定理 20.3　角 $\alpha(\gamma)$ は，γ によって囲まれた領域の中にある，P の頂点の曲率の和に等しい．

証明▶ γ の内部にある頂点の数 n に関する帰納法で示そう．$n=1$ であれば，これは補題 20.4 である．

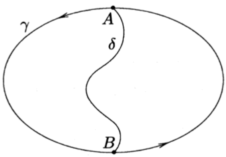


図 20.8　ガウス=ボネの定理の証明のための図

$n>1$ であれば，γ によって囲まれた領域を，弧 δ によって 2 つの領域に分け*[10]，それぞれの内部の頂点の個数が n より少なくなるようにする(図 20.8 参照)．γ_1 を，A から B へは γ をたどり，その後，B から A へは δ をたどる道とする．同じように，γ_2 を，A から B へは δ をたどり，その後，B から A へは γ をたどる道とする．γ_1 と γ_2 を繋いだ道が γ と違うのは，弧 δ を往復するところだけである．それゆえ，δ の寄与は打ち消し合い，$\alpha(\gamma)=\alpha(\gamma_1)+\alpha(\gamma_2)$ となり，帰納法によって結論が導かれる．◀

20.6　一般多面体上の閉測地線

図 20.9 に描いたのは，正 4 面体と立方体上の単純な閉測地線である．前者は，正 4 面体を，互いにねじれの位置にある稜に平行なある平面によって切断したものであり，後者は，立方体を，その大対角線に垂直な平面で切断したものである．

一般の凸な閉多面体 P 上にそのような測地線を見つけることができるだろうか？　ここで「一般」という言葉は，補題 20.1 で与えられた線形関係以外

*[10] [訳註]もちろん，δ も，稜とは横断的に交わり，頂点を通らないように取る．

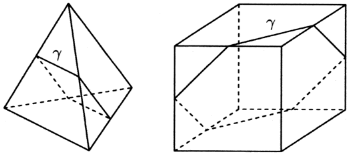


図 20.9　多面体上の閉測地線

には，頂点の曲率と π の間の，有理係数の線形関係がないということを意味している．

> **定理 20.4**　P 上には単純な閉測地線は存在しない．

証明▶ そのような測地線 γ があったと仮定する．すると，γ の単位接ベクトルは γ に沿って平行移動される．特に，この接ベクトルは，回転することなく，最初の点に戻ってくる．

一方，ガウス=ボネの定理によれば，γ に沿って平行移動すると，γ の内側の頂点の曲率の和に等しい角で回転することになる．この頂点の集合は，P の頂点の集合の空でない真部分集合である．P が一般の多面体なので，曲率の和は 2π の倍数になることができず，矛盾である*[11]．◀

特に，図 20.9 の測地線は，正 4 面体や立方体に一般な摂動を少しでも施せば消えてしまう．

20.7　正多面体上の閉測地線

前節の議論からは，多面体が対称であるほど，閉測地線が作りやすいことになるだろう．この観点から，正多面体の場合を調べることは理に適（かな）っている（そのような研究に対しては[16]，[31]を参照すること）．

---

*[11] [訳註]補題 20.1 では，すべての頂点の曲率の和が 4π になると言っており，ここでは，単純な閉測地線によって分割された片方の領域にある頂点の曲率の和が 2π の倍数になれないと言っているのである．

いちばん簡単なのは正 4 面体の場合である．稜の長さが 1 の正 4 面体を T と書き，その頂点を A, B, C, D と書く．長さ 1 の辺を持つ正三角形による平面の標準的なタイル貼りを考えて，図 20.10 に示すようにその頂点に A, B, C, D という文字を書きこむ．平面から正 4 面体 T の上への自然な写像 π で，タイル貼りの頂点を T の同じ名前の頂点に写し，辺を稜に，三角形(タイル)を面に写すものがある．

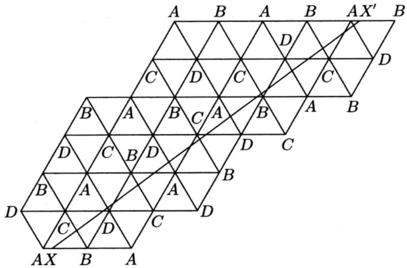


図 20.10　平面の三角タイル貼り

平面の座標系で，A という名前のついた点を原点とし，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を座標ベクトルとするものを取る．ここで，B は A の右隣りにあるもので，C は AB のすぐ上にあるものとする．AB 上に点 $X=(\alpha, 0)$, $0<\alpha<1$ を取り，AB と書かれる別の辺上に点 $X'=(\alpha+2p, 2q)$, $q \geqq p \geqq 0$, $q>0$ を取る．$(p, q)=1$ で，$q\alpha \notin \mathbb{Z}$ であれば，写像 π は線分 XX' を，T 上の単純な(自分自身を繰り返さない)閉測地線で，長さが $2\sqrt{p^2+pq+q^2}$ のものに写す．さらに，この測地線は自己交差をせず，T 上のすべての閉測地線はこの構成によって得られる．特に，T 上のすべての閉測地線は自己交差しない(演習問題 20.8 参照)．$p=2$, $q=3$ に対応する測地線が図 20.11 に描いてある．それが 4 面体を切り分ける 2 つ部分も図 20.11 で示されている(ガウス=ボネの定理に従って，この 2 つの部分はそれぞれ 2 つの頂点を含んでいる)．

演習問題 20.9 に，正 8 面体上の閉測地線の完全な記述が与えられている．正 8 面体の平行性と対称性により，自己交差しない閉測地線はただ 2 本しかなく，その長さは 3 と $2\sqrt{3}$ である(ここで，正 8 面体の稜の長さは 1 としている)．そのうち 1 本は平面的なものだが，もう 1 本はそうでない．また，自

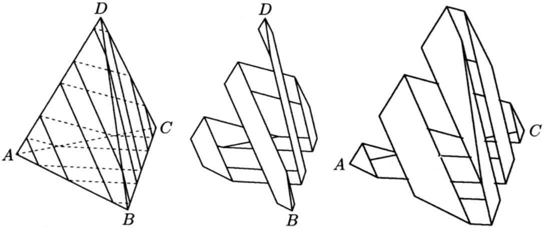


図 20.11　4 面体上の閉測地線

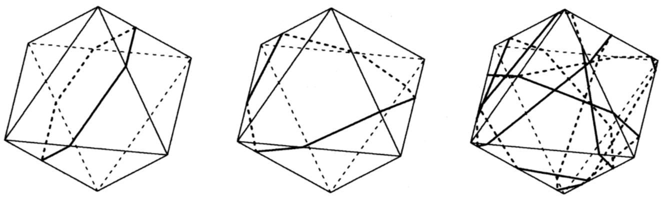


図 20.12　8 面体上の 3 つの閉測地線

己交差する閉測地線で平行でないものが無限にある．図 20.12 には，2 本の自己交差しない閉測地線と 1 本の自己交差する閉測地線が示されている．

演習問題 20.10 に，立方体上の閉測地線のほとんど完全な記述が与えられて

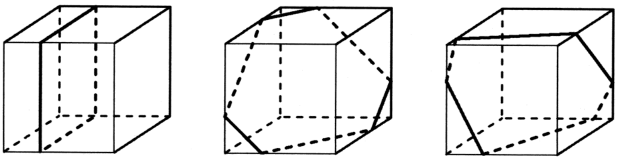


図 20.13　立方体上の単純な閉測地線

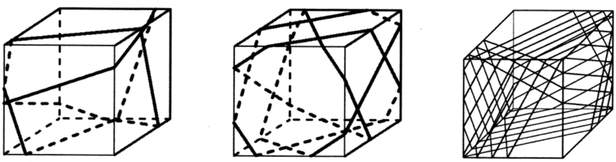


図 20.14　立方体上の自己交差する閉測地線

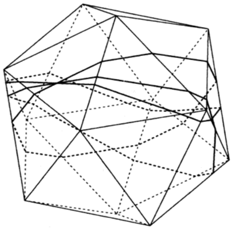


図 20.15 20 面体上の単純な閉測地線

いる．自己交差しない閉測地線には 3 つのタイプがあり(その長さは $4, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{5}$)，自己交差する閉測地線には無限のタイプがある．3 本の自己交差しない閉測地線と 3 本の自己交差する閉測地線が，それぞれ図 20.13 と 20.14 に描かれている．

正 20 面体上には，(正 20 面体の平行性と対称性を除いて)3 本の自己交差しない閉測地線があり(長さは $5, 3\sqrt{3}, 2\sqrt{7}$)，そのうちの 1 本だけが平面的である．その 3 本が図 20.15 に描かれている．また，無限個の自己交差する閉測地線もある(詳しくは [31]を参照すること)．

20.8 滑らかな曲面：パノラマ

微分幾何において，これまでに述べてきたすべての概念が滑らかな曲面に対して定義される．多面体の場合と滑らかな場合の間の関係は，粗っぽく言えば，20.1 節で述べた平面での折れ線と滑らかな曲線との間の関係と同じである．

曲率の定義は系 20.2 の主張がモデルとなる．X を曲面の点とする．点 X の小さい近傍で，面積が A のものを考える．この近傍のあらゆる点で，曲面への単位法ベクトルを考える(すると曲面はヤマアラシのようになる)．これらの法ベクトルを原点に平行移動すると，単位球面のある部分が得られる．その面積を A' とする．点 X での曲面の曲率は，近傍を点 X に縮めていったときの，比 A'/A の極限値であるとする．

たとえば，円柱や円錐の曲率は 0 であるが，それは単位法ベクトルの端点

はある曲線の上にあり，面積は 0 であるからである．半径 r の球面の曲率は $1/r^2$ である．

この定義と，20.3 節の多面錐の曲率の定義との関係は直接的なものである．C を多面錐とする．その稜と頂点を滑らかにして，多面錐を近似する滑らかな曲面を得ることができる．この曲面の単位法ベクトルは単位球面上のある領域を描く．多面錐 C に対し，この領域は，球面と双対錐 C^* との共通部分である，球面上の領域 P となる．系 20.2 から分かるように，P の面積は C の曲率である．

曲率には符号がある．これは，面積 A' に符号があるからである．具体的に言うと，点 X の近傍の境界を反時計回りに 1 周すれば，単位法ベクトルの(先)端点は，単位球面上のある曲線を 1 周する．この曲線を反時計回りの向きに動くなら曲率は正であり，時計回りなら負である．トーラスの場合は図 20.16 を参照せよ．

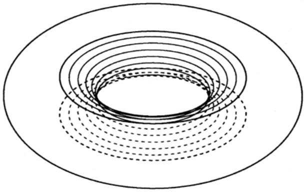


図 20.16　正曲率と負曲率

補題 20.1 と同じように，凸な閉曲面の全曲率は 4π である．もっと一般な閉曲面に対しては，χ をそのオイラー標数として，全曲率は $2\pi\chi$ となる．

多面錐の曲率は平坦角を保つような変形の下では変わらない．同じように，滑らかな曲面の曲率は等長変形の下では一定のままである*12．等長変形は曲面の内部幾何を変えない．たとえば，紙片(平面の一部)を引き伸ばさずに曲げれば，非常に多様な可展面が得られるが，可展面の曲率はすべて 0 である(第 2 巻第 13 講参照)．

γ を滑らかな曲面 S 上の向きづけられた滑らかな曲線とする．γ に沿った平

*12 [原註]これは C. F. ガウスの Theorema Egregium(テオレマ・エグレギウム，驚くべき定理)である．

行移動は，S の接平面を γ に沿って滑らすことなく転がすことで定義される．同じことだが，平面の上に S を置いて，曲線 γ に沿って曲面を転がしてもよい．

ガウス=ボネの定理は滑らかという枠組みでも成り立つ．つまり，**曲面 S の接平面の向きづけられた単純閉曲線 γ に沿った平行移動によって，γ の内側の S の全曲率に等しい角だけ，接平面が回転する．**

滑らかな曲面 S 上の**測地線**は，S 上の曲線 γ で，その接ベクトルが γ 自身に沿って平行移動されるものと定義される．もし測地線に沿って曲面を転がすなら，水平面上に残される跡は直線になる．測地線は S に束縛された自由粒子の軌跡である．つまり，自由粒子の速さは一定で，加速度は曲面に垂直である(つまり，粒子に働く唯一の力は法線方向の反作用力である)．たとえば，球面上の測地線は大円である．多面体の場合とまったく同じように，測地線は十分に近い点の対の間の距離を最小化する．

定理 20.4 とは違って，あらゆる滑らかで凸な閉曲面には単純閉測地線が，実際には，3 本あるのである．これはポアンカレによって予想されたもので，その証明は 1930 年にリュステルニクとシュニレルマンによって公表された．この 3 本の単純閉測地線は，楕円面に対しては一目でわかるもので，3 枚の対称面と楕円面との交わりである．

最後に，滑らかな曲面上の向きづけられた曲線の**測地的曲率**を定義しよう．曲線を測地線による折れ線 γ で近似する．γ の測地的曲率は，折れ線としての角(かど)以外では 0 であり，角での値は補角の角度であるとする．ただし符号は，γ が左回りのときは正で，右回りのときは負である．測地線の測地的曲率は 0 である．

γ を向きづけられた単純な測地的多角形[*13]とする．γ に沿った平行移動は，接平面の回転を引き起こし，この回転の角は，γ の全測地的曲率の 2π に対する補角になる(図 20.17 参照)．これによって，次の形のガウス=ボネの定理が得られる．**向きづけられた単純な閉曲線 γ の全測地的曲率に，γ の内側の曲面の全曲率を足すと 2π となる．**

[*13] [訳註]測地線による閉じた折れ線で，自己交差のないもののこと．

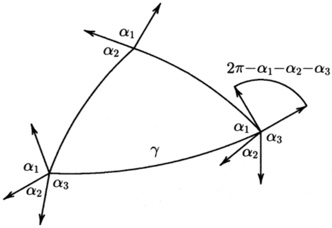


図 20.17　曲面上の平行移動

20.9　3 つの例：テニスボール，フーコーの振り子，自転車の車輪

テニスボールには表面に閉曲線が刻みこまれている．この曲線上の点に印をつけ，印をつけた点が床に触れるように，ボールを床の上に置く．そこで，この曲線に沿って，印をつけた点がもう一度床に触れるまで，滑らすことなくボールを転がす．ボールが最初の位置から最後の位置まで動くと，垂直軸に関してある回転をする．この回転角はどれだけになるだろうか？

ガウス=ボネの定理が解答を与えてくれる．曲線に囲まれた全曲率がその答えである．曲線は複雑な形をしてはいるが，テニスボールを見てみれば，この曲線が対称でボールの全曲率のちょうど半分，つまり，2π を囲んでいることが分かる．したがって，回転の角は 0 となる．

第 2 の例は，地球の回転を証明してくれる，フーコーの振り子に関するものである．元々の振り子は，1850 年のパリ万国博覧会のためにレオン・フーコーによって作られたものであり，パリのパンテオンのドームから吊り下げられた，長さ 67 メートル，28 キロの重さの振り子であった．その運動面は，地球に関して，ゆっくりと時計回りに回転した*14．今では，ほとんどすべての科学博物館にフーコーの振り子が展示されている．

振り子が北極に吊り下げられていると想像してほしい．地球が東向きに回転している間，その運動面は同じままである．こうして，振り子の運動面は，地

*14 [原註]読者に，ウンベルト・エーコの小説『フーコーの振り子』を推薦する．
[訳註]1993 年に日本語訳(藤村昌昭訳)が文藝春秋から出版されている．

球に関して，1時間当たり $360°/25=15°$ の角速度で回転する．赤道に近づくにつれ，この効果は弱まっていき，赤道上では，振り子の運動面は地球に関して回転しない(対称性による！)．

フーコーの振り子は純粋に幾何的な現象である．その挙動は吊り下げられる点の運動によっている．地球が回転せず，振り子を吊り下げている点だけが地表のある曲線 γ に沿って動いていると想像してみよう．さらに，γ が球面多角形であると仮定する．測地線分に沿って動いている限り，振り子の運動面は測地線の方向に関して回転しない．曲がり角では，振り子の運動面は同じままだが，吊り下げている点の運動の方向は γ の外角だけ変わる．こうして，振り子の運動面は，γ の方向に関して，曲がり角の外角だけ回ることになる．

結論：振り子の運動面の全回転は，吊り下げている点の軌跡の全測地曲率に等しい．ガウス=ボネの定理によって，これは，2π からこの軌跡の内部の全曲率を引いたものになる．

フーコーの振り子を緯度 ψ で考えよう．吊り下げている点の軌跡は緯線の作る円周である．この円周によって囲まれた球面の極冠(きょくかん)*15の全曲率は，単位球面の緯度 ψ の極冠の面積に等しい．これは容易に計算でき，答えは $2\pi(1-\sin\psi)$ となる(演習 20.3 を参照)．こうして，振り子の運動面の全回転は $2\pi\sin\psi$ となる．

パリでは ψ は大体 $48°$ であり，パンテオンでのフーコーの振り子の角速度は1時間当たり $11°$ である．

物理では，振り子の運動面の回転は，コリオリの力という慣性力に帰される．同じ力が，地球上の大気の大循環や風の方向の説明に使われる．北半球の河川は主に右岸を侵食し，南半球の河川は主に左岸を侵食する傾向にあることが観察される．このことは，オビ川，レナ川，エニセイ川といったロシアの北に流れる大河では特に顕著である．この現象もまたコリオリの力に帰されることが多いが，この問題には多少議論の余地がある(ただ，コリオリの力はバスタブの中の水の回転には責任がない)．

最後に，M. レヴィ[51]に従えば，摩擦のないベアリングのついた自転車の

*15 [訳註]北極なり南極なりを含む円状の領域のこと．多く氷に覆われ，白い冠のように見えることからこの名がある．

車輪を使って，曲面上の平行移動を物理的に実現してみせることができる．車輪の平面を曲面に接するようにしながら，車輪軸に関する車輪の角速度が 0 であるようにする．車輪の中心を曲面の曲線に沿って進ませるときのスポークの動きは，接ベクトルの曲線に沿った平行移動と考えることができる*[16](この現象の説明はフーコーの振り子に対するものと本質的には同じである)．

本講の数学を開拓した人びと



ピエール・ボネ (1819-1892)
エコールポリテクニク入学と同時に土木学校に学ぶ．土木技師となるが，数学を研究するため辞職した．エコールポリテクニクに職を得，のちソルボンヌ大学教授となる．級数論，微分幾何学，変分学を研究．ガウス=ボネの定理に名を残す．



ジャン・ベルナール・レオン・フーコー (1819-1868)
病弱のため学校に通わず自宅で教育を受ける．はじめ医学を志すが，アルマン・フィゾーに出会い，物理学に転向する．太陽表面の写真撮影，太陽光の干渉からその波動性を確認，フーコーの振り子実験により地球の自転を証明，ジャイロスコープの発明など多数の業績を残す．



カール・フリードリヒ・ガウス (1777-1855)
数学以外でもその業績は幅広い．小惑星ケレスの軌道計算のため，3 回の観測だけで小惑星の軌道を素早く計算する方法を開発する．W. E. ヴェーバーと共同で電気と磁気の研究をし，電磁気通信機を発明した．地球規模での地磁気の測定も行う．第 3 講(第 1 巻)も参照．



A. L. リュステルニク (1899-1981)
「変分法の直接法」という論文でモスクワ大学から学位取得．関数解析，変分法，トポロジー，計算数学を研究し，トポロジー的手法の変分法のみならず解析学全般への応用を展開した．閉測地線に関するポアンカレの問題を解く(リュステルニク=シュニレルマンの定理)．

---

*[16] [訳註]車輪の平面を曲面の接平面と考え，各スポークは接ベクトルと考えている．



アンリ・ポアンカレ (1854-1912)
微分方程式論，保型関数論，ポテンシャル論，確率論，非ユークリッド幾何，天体力学などを研究し，最後の万能の人と呼ばれる．代数トポロジーと多変数関数論の創始者である．啓蒙活動も重要．『科学と仮説』『科学と方法』『科学の価値』を著した．



L. G. シュニレルマン (1905-1938)
モスクワ大学に16歳で入学．整数論，代数学，トポロジーなどを研究．閉測地線に関するポアンカレの問題を解く(リュステルニク=シュニレルマンの定理)．ゴールドバッハの予想の解法の本質的な進展(任意の自然数が20個以下の素数の和に書けること)に貢献した．

演習問題

20.1 (n,k) 星型多角形，すなわち，n 個の先端のある星型で k 回回転するもの，の曲率の和を求めよ．ただし，数 n と k は互いに素であるとする*17．

20.2 C を凸錐とし，C^* をその双対錐とする．$(C^*)^*=C$ であることを示せ．

20.3 単位球面上の緯度 ψ の極冠の面積を求めよ．

20.4 円錐状の物体に投げ輪を投げて引き倒す．円錐の頂角が小さければ投げ輪はそのままでいるが，頂角が十分に大きければ投げ輪は滑って外れる(もちろん，摩擦はないと仮定している)．この2つの場合を分ける，臨界的な頂角を求めよ．

20.5 平面に滑らかな単純閉曲線が描かれている．凸な物体をこの曲線のある点で平面上に置き，物体を滑らさずに転がして，曲線に沿って1周させる．物体の表面上の，曲線の軌跡は単純閉曲線になり得ないことを証明せよ．

---

*17 [訳註]たとえば，図 20.2 の左図は $(7,2)$ 星型多角形で，右図は $(7,3)$ 星型多角形である．

[ヒント]ガウス=ボネの定理と平面単純閉曲線の全曲率が 2π であることを使え.

次の問題は単位球面上の曲線の幾何に関するもので, 10.2 節の題材に大いに関係がある.

20.6 γ を単位球面上の凸な単純閉曲線とする*18. γ の各点を, 外向き法線(つまり, 直交する大円)*19に沿って $\pi/2$ の距離だけ動かす. 得られる曲線を γ^* と書き, γ の**双対**曲線と呼ぶ.

(a) $(\gamma^*)^*$ が γ に対蹠的な曲線である(γ の点の対蹠点からなる)ことを示せ.

(b) γ^* の長さが, 2π から, γ で囲まれた領域の面積を引いたものになることを証明せよ.

(c) γ_ε を, γ から, 外向き法線に沿って各点を距離 ε だけ動かして得られる曲線とする. γ_ε の長さとそれで囲まれる領域の面積を求めよ.

γ' を, γ から, γ に接する大円に沿って各点を距離 $\pi/2$ だけ動かして得られる曲線とする. 曲線 γ' を γ の**導曲線**と呼ぶ.

(d) γ を緯度 ϕ の円とする. γ' を求めよ.

(e) γ' が球面の面積を 2 等分することを証明せよ.

20.7 与えられた凸多面体 P に対して, そのすべての頂点での立体角の和を $S(P)$ と書き, 2 面角の和を $D(P)$ と書く.

(a) P が 4 面体なら, $S(P)-2D(P)+4\pi=0$ であることを証明せよ.

[ヒント]P の面を原点に平行移動し, それぞれの半空間によって単位球面を分割する. 包除公式を使え*20.

---

*18 [訳註]閉曲線でないと, 以下の議論が成り立たないので.

*19 [訳註]γ に向きがあれば, 左側を内側の領域と呼んだので, 外向き法線の向きは右ということになる.

*20 [訳註]包除公式は $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ とそれを一般化した公式で, 普通は有限集合の元の個数に対して使われるが, 有界集合の面積に対しても使うことができる. n 個の集合に対しては

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i\cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i\cap A_j\cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1\cap\cdots\cap A_n|$$

となる.

(b) 一般に，$S(P)-2D(P)+2\pi f-4\pi=0$ となることを証明せよ．ここで，f は P の面の数である(グラムの定理)．

[ヒント]P を 4 面体に切り分け，求める関係式の加法性を用いよ．

20.8 (a) 20.7 節で与えた構成で，正 4 面体上のすべての閉測地線が与えられることを証明せよ．

(b) 正 4 面体上のすべての閉測地線が自己交差しないことを証明せよ．

20.9 図 20.10(ただし頂点に対する記号は書かれていないとする)でのように標準的な正三角形によってタイル貼りされている平面での，頂点を通らない直線は，初期点を含む三角形が 8 面体の面と同一視されたときには，8 面体の上の測地線となる．図 20.10 でのように，端点が $(\alpha,0)$, $(\alpha+k,\ell)$, $0<\alpha<1$, $k,\ell\in\mathbb{Z}$, $\ell\geqq k\geqq 0$, $\ell>0$, $\dfrac{\ell}{(k,\ell)}\alpha\notin\mathbb{Z}$ である線分を考える．この線分が，自分の繰り返しを含まない，閉測地線に対応するとき，(k,ℓ) を**良い対**と呼ぶ．

(a) $(p,q)=1$, $q\geqq p\geqq 0$, $q>0$ とする．もし $p\equiv q \bmod 3$ なら，$(2p,2q)$ は良い対であることを示せ．また，$p\not\equiv q \bmod 3$ ならば，$(3p,3q)$ は良い対であることを示せ．

(b) 8 面体の平行性と対称性を除いて，(a)の対が，正 8 面体のすべての閉測地線を与えることを示せ．

(c) 自己交差しないのは，良い対 $(0,3)$ と $(2,2)$ に対応する測地線だけであることを示せ．

20.10 標準的な正方形タイル貼りの頂点を通らないような，平面上の直線分を考える．初期点を含む正方形を立方体の面と同一視したとすれば，それは立方体の上の測地線となる．タイル貼りの頂点が整数座標を持つ点になるような，自然な座標系を使う．端点が $(\alpha,0)$, $(\alpha+k,\ell)$, $0<\alpha<1$, $k,\ell\in\mathbb{Z}$, $\ell\geqq k\geqq 0$, $\ell>0$, $\dfrac{\ell}{(k,\ell)}\alpha\notin\mathbb{Z}$ である線分を考える．この線分が自分の繰り返しを含まない，閉測地線に対応するとき，また (k,ℓ) を**良い対**と呼ぶ．

(a) $(p,q)=1$ とする．p と q がともに奇数であれば，$(3p,3q)$ が良い対であることを示せ．また，p,q のうちの 1 つが偶数であれば，$(2p,2q)$ と $(4p,4q)$ のどちらかが良い対であることを示せ(どちらがそうなるかは分からない)．

(b) 平行性と立方体の対称性を除いて，(a)の対が，立方体のすべての閉測地線を与えることを示せ.

(c) 良い対 $(0,4), (3,3), (2,4)$ に対応する測地線だけが自己交差しないことを示せ.

第21講 内接できない多面体

21.1 主定理

凸多面体をランダムに選んだとすれば，その頂点がすべて1つの球面上にあるということはありそうにもないことである．たとえば，図21.1のピラミッドは，底面の4角形がある円周に内接していないようなら，球面に内接することはない．しかし，底面の形を内接4辺形になるように調整し，それからピラミッドを内接多面体になるようにするのは簡単なことである．そうであれば，あらゆる凸多面体はある球面に内接するように調整できるのではないかと，考えても不思議はない．

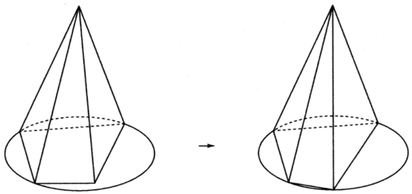


図 21.1 ピラミッドを球面に内接するように変形する

ところが，そんなことにはなっていないのだ！ 1928年にE. シュタイニッツは次の定理を証明した．

> **定理 21.1** Pを凸多面体とする．Pの頂点が黒と白に色付けされており，黒い頂点の方が多く，黒い頂点どうしは隣り合うことがないとする．そのとき，Pを球面に内接させることはできない．

定理の条件は純粋に組み合わせ論的なものなので，どんな変形をしてもP

を内接させることはできないことになる*1．こうして，P は**内接できない多面体**となる．

次にあげるのはこの条件を満たす多面体の例である．8面体を考え，頂点を白く塗る．各面に4面体を接着して(凸性を壊さないように高さは十分小さくする)，新しい頂点を黒く塗る．黒い頂点は8つで，白い頂点は6つであり，黒い頂点どうしは稜で結ばれていない(図21.2参照)．まったく同じように，8面体の代わりに20面体から始めてもよい．

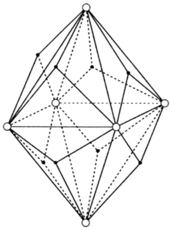


図 21.2　内接できない多面体

一見すると，状況はパラドクスに見える．正8面体はもともと球面に内接している．その面に接着する4面体の大きさを選んで，新しい頂点が同じ球面上にあるように選ぶのは簡単なことであり，球面に内接する多面体が得られる．何が間違っているのかといえば，そうやってできる多面体は凸ではないということなのである！

定理の証明▶ 球面 S と(2つの平面で作られる)楔を考え，その稜が S と2点 A, B で交わっているとする．楔を作る2つの平面は，球面と2つの円周で交わる．2円の間の角を点 A で測ったものを α とする．α を球面に関する2面角，または短く，相対2面角と呼ぼう．明らかに，点 B の方を選んでも，この手続きで得られる角の大きさは等しい(図21.3参照)．α が相対2面角のとき，$\pi-\alpha$ を相対2面外角という．

今度は，頂点 A が球面上にあり，A を端点とする稜が球面 S と交わっているような凸多面錐を考える．そのとき，その相対2面外角の和は 2π となる．

*1 [訳註]図21.1のような変形では頂点の色の隣り合い方は変えられない．

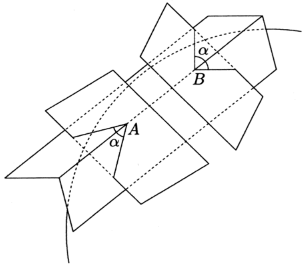


図 21.3　相対 2 面角

このことを示そう．A における S の接平面を次のように使えば，相対 2 面外角の値を求めることができる．この接平面を，球面の内側へ平行移動して，この多面錐のすべての稜と交わるようにする．交わりは凸多角形となり，その角は相対 2 面角に等しい．しかし，どんな凸多角形の外角の和も 2π であるから，相対 2 面外角の和が 2π となることが証明されたことになる（図 21.4 参照）．

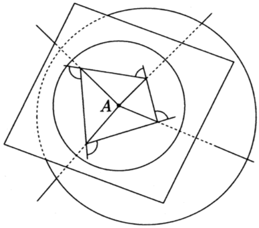


図 21.4　定理 21.1 の証明

この準備をしてから，定理の条件を満たす内接多面体 P を考える．あらゆる頂点に対し，相対 2 面外角の和は 2π である．相対 2 面外角を，白い頂点に対しては正の符号を，黒い頂点に対しては負の符号をつけて取った和を Σ とする．黒い頂点の方が多いのだから，$\Sigma<0$ となっている．

一方，稜には，両端の 2 頂点がともに白のものと，白と黒のものの 2 種類がある．稜の端点での相対 2 面外角の和は等しい．白–白の稜に対しては，両端からの Σ への寄与は正であり，黒–白の稜に対しては寄与は相殺するので 0

である．それゆえ $\Sigma \geqq 0$ となり，矛盾となる．◀

21.2　もう1つの例

定理21.1は，凸な多面体が内接できないための十分条件だが，決して必要条件ではない．図21.5に示された例を考える．この切頂立方体 P は定理21.1の条件を満たすことができない．P が内接できないことを証明しよう．

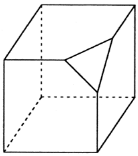


図 21.5　切頂立方体

▶ 3つの面と頂点 A を持つ多面錐で，稜が球面 S と交わるものを考える．

補題 21.1　A が S の外側にあるか，S の上にあるか，S の内側にあるかによって，相対2面角の和はそれぞれ，π より小さいか，等しいか，大きいかとなる．

証明▶ 多面錐の3面と球面との交わりは3つの円になり，この3つの円の間の角が相対2面角である．これらの円周上にはない球面の点を取り，この点から S を立体射影する*2．平面に3つの円周が得られ，その円周の間の角の大きさは球面上にあるときと同じである(これは，立体射影が角を保ち，円周を円周に写すことによる)．

A が S 上にあれば，3つの円周は1点で交わり，角の和は π である(図21.6参照)．A が S 上になければ，図21.6に示したように，A が S の外側にあるか内側にあるかの，2つの場合がある．前の場合，角の和は π より小さく，後

*2 [訳註]この点を Q とし，球面の中心を O とするとき，O を通り，QO に直交する平面 π へ射影すること．球面上の点 X に対し，直線 QX と平面 π との交点を対応させるものである．Q には平面に対応する点はなく，敢えて言えば，π の無限遠点に対応する．

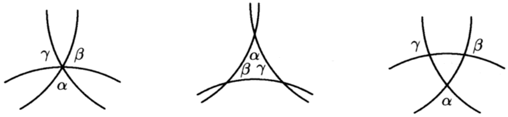


図 21.6　3 円の互いの位置

の場合は π より大きい. ◀

切頂立方体 P に戻り，それが球面 S に内接すると仮定しよう．Q を元の立方体とする．つまり，多面体 Q の 1 つの頂点を切り落としたものが P であるとする．Q の頂点を黒と白に塗り，どの稜の 2 端点も異なる色であるようにする．切り落とした頂点を A と呼び，それが白かったとする．

Q の各稜に，P の対応する稜の相対 2 面外角を割り当てる．A 以外の Q の各頂点に対して，これら相対 2 面外角の和は 2π である．頂点 A は明らかに S の外にあるので*3，補題 21.1 によって，A での相対 2 面角の和は π より小さく，したがって，相対 2 面外角の和は 2π より大きい．

今度は定理 21.1 の証明でしたように，符号付きで，相対 2 面角の和を Q のすべての頂点に関して足し合わせる．あらゆる稜が白と黒の端点を持つので，この和は 0 になる．その一方，Q の A 以外の 7 つの頂点は白が 3 つと黒が 4 つなので全体には -2π の寄与となるが，A の寄与は 2π より大きいから，この和は正になる．これは矛盾である．◀

最後に，球面と凸多面体の相互の位置には，内接するとか内接しないという以外にも，すべての稜が球面に接するという，第 3 の型が考えられることを述べよう．P. ケーベは 1936 年に，凸多面体のすべての組み合わせ論的な型がそのような多面体によって実現されることを証明した．ずっと後の 1992 年に，O. シュラムは『卵を鳥かごに入れる方法』という題の論文[69]で，球面を任意の卵形面で置き換えることができることを証明している．

---

*3 [訳註]P が S に内接すると仮定したので．

本講の数学を開拓した人びと



オデッド・シュラム (1961 年生まれ)
イスラエル生まれ，ギュイエ峰に単独登山中に死亡した．離散モデルと連続スケーリング極限で，モデルの数が共形不変量となるものをテーマとした．確率論では SLE(Schramm-Loewner evolution) が知られ，他にグラフ理論，離散共形幾何などを研究する．



エルンスト・シュタイニッツ (1871-1928)
17 歳でピアノソナタを書いたが，音楽より数学を選ぶ．論文「体の代数的理論」は重要で，体の抽象的定義を初めて定義し，素体，完全体，体の拡大の超越次数などを定義する．シュタイニッツの交換補題，シュタイニッツ数に名を残す．死後『多面体論講義』が出版される．

演習問題

21.1 8 面体の各面に 4 面体を接着して，その頂点が 8 面体の外接球面にあるようにすると，得られる多面体が凸にならないことを，具体的な計算によって確かめよ (図 21.2 参照)．

21.2 球面から平面への立体射影が，円周を円周に写し，その間の角を変えないことを証明せよ．

21.3* P を，面が黒と白に色付けされた凸多面体であり，黒い面の方が多く，どんな黒い 2 面も隣り合っていないとする．そのとき，P が球面に外接することはないことを示せ．

そのような多面体の簡単な例が，立方体からすべての頂点を切り落とすことで得られる (図 21.7 参照)．

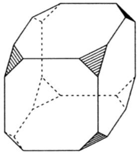


図 21.7　外接できない多面体

21.4 あらゆる頂点が同じ数の面と隣接しているような多面体を考える．頂点が黒と白に塗られ，同じ色のどんな2つの頂点も隣接していないなら，黒い頂点の数と白い頂点の数が等しいことを証明せよ．

21.5 多面体の頂点を黒と白に色付けし，同じ色のどんな2つの頂点も隣接しないようにできるのは，各面が偶数個の稜を持っているとき，かつそのときに限ることを証明せよ．

［ヒント］1つの頂点に色を塗り，それから隣接している頂点に，さらにそれに隣接する頂点に色を塗ることを繰り返す．このプロセスで望むような色付けができるか，多面体の奇数個の稜からなる閉路が存在するかのどちらかである．

第22講 ヒルベルトの忘れられた問題

22.1 ヒルベルトの第3問題

立方体を有限個の平面で切り，得られた多面体の断片を集めて，同じ体積の正4面体を得ることができるか？

これは，1900年8月8日に，パリの国際数学者会議でダーフィト・ヒルベルトが，その有名な講演で提示した23の問題の中の3番目の問題を少し変えたものである．ヒルベルトの問題は数学にとても大きな影響を与えた．そのほとんどは20世紀のうちに解かれ，それぞれの問題に非常に特別な歴史がある．中でも，この第3問題は多くの点で別格な存在である．

第1にこれがヒルベルトの23の問題の中で最初に解決されたものだったことである．解決は当時23歳のドイツの幾何学者で，ヒルベルトの弟子だったマックス・デーンによってもたらされた[20]．彼の論文の出版はパリの会議の2年後のことだったが，解答が発見されたのはもっと前，恐らくはヒルベルトが問題を述べる前のことであった．

デーンの証明(以下に述べるものとほぼ同じ証明)は短くて明瞭なもので，読者が手にしているような，幾何の啓蒙的な講義や論文や書籍の人気のあるテーマの1つとなった．しかし，数学研究者の間ではほとんど忘れられたものになっていた．

もちろん，デーンの名前が忘れられることはなかった．彼は3次元多様体のトポロジーにおける並ぶものもない専門家になったが，彼の1902年の論文が代表的な業績と考えられたことはなかった．

1976年に，アメリカ数学会は『ヒルベルトの問題から生まれた数学の発展』という題名の2巻の論文集[93]を刊行した．それは，4分の3世紀におよぶ

23 の問題の歴史についての非常にしっかりした解説書で，完全な解答，部分的な解答，一般化，類似の問題などを含んでいた．そこではヒルベルトの 23 の問題のうち，22 の問題については徹底的な解析がなされていた．しかし，第 3 問題は議論されていなかったのである．何の発展もなく，数学に影響を与えることもなく，議論する価値はないと，編集者が考えていたのは明らかなことであった．

そのほんの数年後に，そんな考えが馬鹿らしく思えるようなことになったのである！　デーンの定理，デーンの理論，デーン不変量は，幾何学におけるもっとも熱いテーマになったのである．これは，代数とトポロジーの境界線上に発展した刺激的な分野である，生まれたての K 理論の影響を受けたためである．ここではこの発展をたどることはせず，定理とその証明を述べるだけにしよう．

22.2　平面における類似の問題に対する答えは「できる」である

定理 22.1（ウォレス，ボヤイ，ゲルウィン）　P_1 と P_2 を面積が等しい 2 つの多角形とする．そのとき，P_1 を直線によって断片に切り分け，この断片を合わせて P_2 を作ることが可能である．

証明▶ 最初に，P_2 を長方形で，1 辺の長さが 1，面積が P_1 と同じである場合に考えれば十分であることは明らかである．この際，P_1 を単に P としてもよい．

第 2 に，どんな多角形領域も三角形に切り分けられるので，一般の多角形

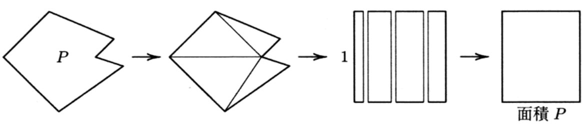


図 22.1　一般の多角形の場合を三角形の場合に帰着する

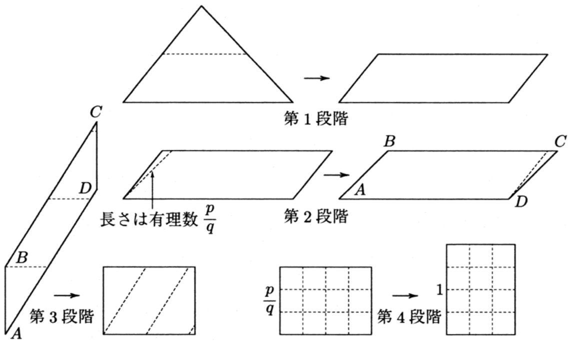


図 22.2　三角形を長方形にする

の証明は三角形の場合の証明に帰着することができる(図 22.1 参照).

第 3 に，三角形を切り貼りして，長さ 1 の辺を持つ長方形に変形する必要がある．これは図 22.2 の 4 段階で行われる．

最初に，三角形から平行 4 辺形を作る(第 1 段階)．その後，平行 4 辺形のある辺から小さい三角形を切り離し，その対辺に接着して，平行 4 辺形の隣辺の比が有理数 p/q になるようにする(第 2 段階)．第 3 段階で，この平行 4 辺形を長方形にする(切断する水平線の必要数は平行 4 辺形の形に依って変わる)．最終段階では，(長方形の縦の辺の長さが p/q であることが分かっているので) $p-1$ 本の水平線と $q-1$ 本の垂直線によって，長方形を pq 個の等しい断片に切り，縦の辺の長さが 1 である長方形に並べ直す．◀

22.3　ヒルベルトの第 3 問題に似てはいないが，類似の解答を持つ平面の問題

1×2 の長方形を，与えられた長方形の辺と平行な辺を持つ，有限個の長方形に切り分けて，それを $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ の正方形に集めることができるか？

できないというのが答えである．証明は幾何的というよりむしろ代数的な

ものだが，それでも，ヒルベルトの問題とは違って，若干の幾何的な準備がいる．

幾何的な準備． 垂直な辺と水平な辺を持つ長方形を，この証明の中では**垂平長方形**と呼ぶことにする．2 つの垂平長方形が与えられているとし，それらを小さな垂平長方形に切り分け，第 1 の長方形の小長方形が第 2 の長方形の小長方形に等しい(合同である)ようにできると仮定しよう．

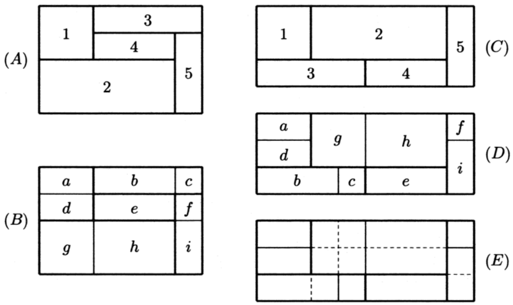


図 22.3　許容される動きで長方形を作る

そのとき，N 個の(さらに小さな)垂平長方形の集まりであって，元の 2 つの長方形がそれぞれ，この集まりから $N-1$ 回の**許容される動き**で得られるものがある．許容される動きとは，幅もしくは高さが同じであるような小長方形を 2 つとって，それを垂直もしくは水平に互いに接着して，幅もしくは高さが同じ長方形を作る，というものである．こうして，切り離すという手順は長方形を接着する手順に置き換えられる．これらのことは図 22.3 に示されるように行われる．

2 つの長方形が，問題が要求するように同じ小長方形に切り分けられているとする(図 22.3 の長方形 (A) と (C) がその例で，同じ小長方形には同じアラビア数字が付けられている)．それから，長方形 (A) の小長方形の長方形の辺を，長方形 (A) の幅や高さ全体にまで延長する(図 22.3 の長方形 (B) を参照)．最初の小長方形のいくつかはさらに小さな小長方形に切り分けられている(長方形 (B) ではローマ字が付けられている．だから，**1** は a と d の和にな

り，**2** は g と h の和になり，などとなる)．それから，第 2 の長方形もそれと同じように小長方形に分ける(図 22.3 の長方形 (D) を参照．長方形 (C) の長方形 **1** は a と d に合同な小長方形に分かれ，長方形 **2** は g, h に分かれ，などとなる)．与えられた第 2 の長方形 C のより小さい長方形への新しい分割が得られ，それからまた，これらの小長方形の辺を長方形の幅や高さ全体に延長する(図 22.3 の長方形 (E) を参照)．これらの最後の小長方形が，求めていた集まりになる．明らかに，許容される動きを使って，これらの小長方形を集めて長方形 (C) にすることができる．別の許容される動きによって，この小長方形から，長方形 (A) の細かい方の分割(つまり，$a, b, c, \cdots, i$ のこと)が得られ，これらの小長方形から，許容される動きを使って，長方形 (A) にすることができる．これで幾何的な準備は終わりである．

代数的証明▶ 面積の和が 2 の，有限個の垂平長方形の集まりがあるとする．これらの長方形から，許容される動きだけを使って，(1×2) 長方形を組み上げることができると仮定する．そのとき，許容される動きだけを使っては，$(\sqrt{2}\times\sqrt{2})$ 正方形を組み上げることはできない．

これが，この 22.3 節の問題の答えが否定的であることを証明するのに必要なことなのである．

$w_1, \cdots, w_N$ を集まりに含まれる長方形の幅とし，$h_1, \cdots, h_N$ をその高さとする(N はこれらの長方形の数である)．

数列

$$1,\ \sqrt{2},\ w_1,\ \cdots,\ w_N \tag{22.1}$$

を考え，この数列から，先行する項の有理係数の線形結合であるような項をすべて取り除く(こうすると，1 は除かず，無理数だから $\sqrt{2}$ は除かないことになる．w_1 を除くのは，有理数 r_1, r_2 があって $w_1=r_1+r_2\sqrt{2}$ となるとき，かつそのときに限る，などとなる)．$a_1, \cdots, a_m$ を残った数とする(すると，$a_1=1$, $a_2=\sqrt{2}$ となる)．重要なのは，(22.1)の中の数はそれぞれ，数 $a_1, \cdots, a_m$ の有理線形結合として一意的に表されるということである．

(これは線形代数の標準的な定理であるが，他書を参照する必要をなくす

ために証明を与えておく．$1=a_1$ も $\sqrt{2}=a_2$ も，$a_1,\cdots,a_m$ の有理線形結合である．帰納法により，w_k に先行する(22.1)の中の数はすべて $a_1,\cdots,a_m$ の有理線形結合であると仮定する．もし w_k が先行する項の有理係数の線形結合でないなら，w_k はどれかの a_j になっており，それゆえ，$a_1,\cdots,a_m$ の有理線形結合である．もし w_k が先行する項の有理係数の線形結合であるなら，w_k は $a_1,\cdots,a_m$ の有理線形結合である．というのは，先行するすべての数は $a_1,\cdots,a_m$ の有理線形結合だからである．あとは一意性を証明すればよい．もし $a_1,\cdots,a_m$ の2つの有理線形結合が等しい，つまり，$\sum_{i=1}^{m} r'_i a_i=\sum_{j=1}^{m} r''_j a_j$ だったとし，$1,\cdots,m$ の中で $r'_s\neq r''_s$ となる最大のものを s とすれば，$a_s=\sum_{i=1}^{s-1}\frac{r'_i-r''_i}{r''_s-r'_s}a_i$ となり，これは，a_s が先行する $a_j\,(j<s)$ の有理線形結合になっていることを意味し，$a_1,\cdots,a_m$ の選び方に矛盾する．）

今度は，数列

$$1,\ \sqrt{2},\ h_1,\ \cdots,\ h_N \tag{22.2}$$

に対して同じことをする．$b_1=1,\ b_2=\sqrt{2}$ であるような数列 $b_1,\cdots,b_n$ で，(22.2)の中の数がそれぞれ，数 $b_1,\cdots,b_n$ の有理線形結合として一意的に表されるものが得られる．

幅が $a_1,\cdots,a_m$ の有理線形結合であり，高さが $b_1,\cdots,b_n$ の有理線形結合であるような長方形を許容可能であると呼ぼう．P を，幅が w で高さが h の許容可能な長方形とし，$w=\sum_{i=1}^{m} r_i a_i,\ h=\sum_{j=1}^{n} s_j b_j$ であるとする．ここで，r_i と s_j はすべて有理数である．長方形 P に対し，**シンボル** $\mathrm{Symb}(P)$ を有理 $m\times n$ 行列 $\|S_{ij}\|$ として定義する．ただし，$S_{ij}=r_i s_j$ である．このシンボルに対して，$\mathrm{Symb}(P)=\sum_{i,j} r_i s_j\, a_i\otimes b_j$ という記号を使うことにする(これは単に上の行列の代わりに使うだけのものである)．こうしてシンボルを $a_i\otimes b_j$ という「表示」の「形式的な有理線形結合」と見なす．2つの形式的線形結合 $\sum_{i,j} t'_{ij}a_i\otimes b_j$ と $\sum_{i,j} t''_{ij}a_i\otimes b_j$ は，すべての i,j に対して $t'_{ij}=t''_{ij}$ のときに等しいと考え，和は $\sum_{i,j} t'_{ij}a_i\otimes b_j+\sum_{i,j} t''_{ij}a_i\otimes b_j=\sum_{i,j}(t'_{ij}+t''_{ij})a_i\otimes b_j$ とする．

P' と P'' を，高さもしくは幅が等しい2つの許容可能な長方形とする．そ

のとき，この2つの長方形を，許容される動きを使って1つの長方形 P に合体させることができる．明らかに，P は許容可能な長方形で，$\mathrm{Symb}(P)=\mathrm{Symb}(P')+\mathrm{Symb}(P'')$ となる．実際，P' と P'' の幅が $w'=\sum_{i=1}^{m} r_i' a_i$ と $w''=\sum_{i=1}^{m} r_i'' a_i$ で，高さが同じ $h=\sum_{j=1}^{n} s_j b_j$ であるなら，P の幅は $w'+w''=\sum_{i=1}^{m}(r_i'+r_i'')a_i$ で，高さは h であり，

$$\begin{aligned}\mathrm{Symb}(P) &= \sum_{i,j}(r_i'+r_i'')s_j\ a_i\otimes b_j\\ &= \sum_{i,j} r_i' s_j\ a_i\otimes b_j+\sum_{i,j} r_i'' s_j\ a_i\otimes b_j\\ &= \mathrm{Symb}(P')+\mathrm{Symb}(P'')\end{aligned}$$

となる．こうして，許容可能な長方形 $P_1,\cdots,P_N$ の集まりがあって，$N-1$ 回の許容される動きで1つの長方形 P にまとめることができるならば，$\mathrm{Symb}(P)=\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Symb}(P_i)$ となる．もしこのようにして2つの異なる長方形 P と P' にまとめることができるなら，$\mathrm{Symb}(P')=\mathrm{Symb}(P)$ となる．1×2 長方形のシンボルが $2(a_1\otimes b_1)$ で，$\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ 正方形のシンボルが $a_2\otimes b_2$ であり，異なっているので，このことから定理が証明されたことになる．◀

22.4　デーンの定理の証明

次のデーンの定理を証明したい．

> **定理 22.2**　C と T を同じ体積の立方体と正4面体とする．それぞれを平面によって同じ数のピースに切り分けたとする(つまり，多面体を2つのピースに切り分け，それから2つのピースの1つを2つのピースに切り分け，それから3つのピースの1つを2つのピースに切り分け，というようにしていく)．C と T からこのようにして得られる(多面体の)ピースの2つの集まりは同じにはなり得ない．

証明▶ 2つの切り分け手順の中に出てくるすべての多面体のすべての稜の長さを $\ell_1, \cdots, \ell_N$ とし，$\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ を対応する2面角とする(すべての i に対して $0<\varphi_i<\pi$ であるとする)．数列 $\ell_1, \cdots, \ell_N$ から，先行する項の有理線形結合であるような項をすべて取り除いて得られる数列 $a_1, \cdots, a_m$ に対し，ℓ_k はそれぞれ a_i の一意的な有理線形結合になっている．それから，数列 $\pi, \varphi_1, \cdots, \varphi_N$ に対し同じことをして得られる数列を $\alpha_0=\pi, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ と書くと，φ_k はそれぞれ α_j の一意的な有理線形結合になる．凸多面体を許容可能であると呼ぶのは，あらゆる稜の長さが $a_1, \cdots, a_m$ の有理線形結合であり，各2面角が $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ の有理線形結合であるときであるとする．

$m_1, \cdots, m_q$ をある許容可能な凸多面体 P の稜の長さとし，$\psi_1, \cdots, \psi_q$ を対応する2面角とする．$m_k=\sum_{i=1}^{m} r_{ki}a_i$ かつ $\psi_k=\sum_{j=0}^{n} s_{kj}\alpha_j$ であるとする．前節で考えたシンボルと同じように，P の**デーン不変量**を

$$\mathrm{Dehn}(P) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{q} r_{ki}s_{kj}\right) a_i \otimes \alpha_j$$

という式で定義する．

重要な注意. 第2の和を取るのが，$j=1$ から n までとなっていて，$j=0$ から n までとなっていないのは，ミスプリントではない．つまり，$s_{k0}\pi$ という項はデーン不変量に含まれていないのである．こうすることで，ある角を π の有理数倍だけ変えても，デーン不変量は影響を受けない．もしある2面角が π の有理数倍**である**ならば，対応する稜はデーン不変量の表示の中にまったく現れてこないのである．

例 22.1　立方体(もしくは直方体)のデーン不変量は0である．実際，すべての角は $\pi/2$ であるから．

補題 22.2　P を凸多面体とする．P が平面 L によって2つのピース P' と P'' に切り分けられたと仮定する．そのとき(P, P', P'' が許容可能である限り)

$$\mathrm{Dehn}(P) = \mathrm{Dehn}(P') + \mathrm{Dehn}(P'')$$

となる．

証明▶ $S=\{e_1, \cdots, e_q\}$ を P のすべての稜の作る集合とし，ℓ_k を稜 e_k の長さ，ψ_k を対応する 2 面角とする．集合 S を 4 つの部分集合に分ける．S_1 は L に内点を持たず，L の P' 側にある稜からなるもので，S_2 は，P' の代わりに P'' に対して同様の集合とする．S_3 は，L によって，P' の稜 e'_k と P'' の稜 e''_k に切り分けられる稜 e_k からなるもので，S_4 は，L にすっかり含まれている稜からなるものとする．各 $e_k \in S_4$ に対して，2 面角 ψ_k は 2 つの部分 ψ'_k と ψ''_k に分かれる．また共通部分 $L \cap P$ を考える．これは凸多面体である．各 $e_k \in S_4$ はその稜であり，$T=\{f_1, \cdots, f_p\}$ をその他の稜の集合とする．各 f_k は P' と P'' の両方の稜である．m_k を f_k の長さ，χ'_k, χ''_k を P' と P'' における対応する 2 面角とする．明らかに，$\chi'_k+\chi''_k=\pi$ である．

P' の稜は次のものからなる．

——稜 $e_k \in S_1$．長さは ℓ_k で，2 面角は ψ_k である．

—— $e_k \in S_3$ に対する稜 e'_k．長さは ℓ'_k で，2 面角は ψ_k である．

——稜 $e_k \in S_4$．長さは ℓ_k で，2 面角は ψ'_k である．

——稜 $f_k \in T$．長さは m_k で，2 面角は χ'_k である．

P'' の稜は次のものからなる．

——稜 $e_k \in S_2$．長さは ℓ_k で，2 面角は ψ_k である．

—— $e_k \in S_3$ に対する稜 e''_k．長さは ℓ''_k で，2 面角は ψ_k である．

——稜 $e_k \in S_4$．長さは ℓ_k で，2 面角は ψ''_k である．

——稜 $f_k \in T$．長さは m_k で，2 面角は χ''_k である．

多面体 P', P'', P のデーン不変量は，4 種類の項を足して得られる．P' と P'' に対しては，これらの種類は上に挙げた 4 種類の稜に対するもので，P に対しては集合 S_1, S_2, S_3, S_4 に対応したものである．$\mathrm{Dehn}(P')$ の第 1 種の項は $\mathrm{Dehn}(P)$ の第 1 種の項と同じである．$\mathrm{Dehn}(P'')$ の第 1 種の項は $\mathrm{Dehn}(P)$ の第 2 種の項と同じである．$\mathrm{Dehn}(P')$ と $\mathrm{Dehn}(P'')$ の第 2 種の項の和は $\mathrm{Dehn}(P)$ の第 3 種の項の和になる．というのは $\ell'_k+\ell''_k=\ell_k$ だからである．$\mathrm{Dehn}(P')$ と $\mathrm{Dehn}(P'')$ の第 3 種の項の和は，$\psi'_k+\psi''_k=\psi_k$ だから，$\mathrm{Dehn}(P)$

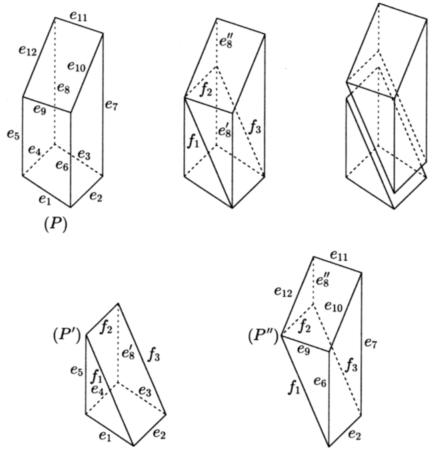


図 22.4　補題 22.2 の証明

の第 4 種の項の和になる．最後に，Dehn(P') と Dehn(P'') の第 4 種の項の和は，$\chi'_k+\chi''_k=\pi$ だから，0 である．こうして，補題に述べたように Dehn(P)= Dehn(P')+Dehn(P'') となる．◀

例を図 22.4 に示した．多面体 P(平行でない底を持つ 4 角形プリズムで，最初の行の左に示したもの)は平面によって 2 つの多面体に切り分けられる(切断は最初の行に，多面体 P' と P'' は 2 つ目の行に示した)．P の稜は $e_1,\cdots,e_{12}$ であり，集合 S_i は，$S_1=\{e_1,e_3,e_4,e_5\}$, $S_2=\{e_6,e_7,e_9,e_{10},e_{11},e_{12}\}$, $S_3=\{e_8\}$, $S_4=\{e_2\}$ である．

定理 22.2 に戻る．もし 2 つの多面体が同じ多面体のピースの集まりに切り分けることができたら，そのデーン不変量はともに，ピースのデーン不変量の和になる．それゆえ，与えられた 2 つの多面体のデーン不変量は互いに等しくなる．しかし立方体のデーン不変量は，すべての 2 面角が $\pi/2$ だから，0 である(例 22.1 参照)．正 4 面体のデーン不変量の方は $6(\ell\otimes\alpha)$ である．ここで，ℓ は稜の長さで，α は 2 面角である．あとは α が π の有理数倍ではないことを確かめる必要があるだけである．

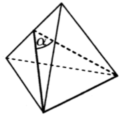


図 22.5　正 4 面体の 2 面角

正 4 面体の 2 面角 α は，辺の長さが $\ell, \ell\frac{\sqrt{3}}{2}, \ell\frac{\sqrt{3}}{2}$ である 2 等辺三角形の最大の角である(図 22.5 参照)．余弦定理により

$$\cos\alpha = \frac{\left(\ell\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\ell\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \ell^2}{2\left(\ell\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\ell\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{3}$$

となる．

補題 22.3　$\cos\alpha = \frac{1}{3}$ であれば，$\frac{\alpha}{\pi}$ は無理数である．

証明▶ $\frac{\alpha}{\pi}$ が有理数ならば，ある n に対して $\cos n\alpha = 1$ となる．しかし，三角法により，最高次の係数が 2^{n-1} のある n 次多項式 P_n に対して

$$\cos n\alpha = P_n(\cos\alpha)$$

となることが知られている(補題 7.4(第 1 巻)参照)．

このことは，次の主張を帰納法によって証明することで示される．その主張とは，すべての n に対して，

$$\cos n\alpha = P_n(\cos\alpha), \quad \sin n\alpha = Q_n(\cos\alpha)\cdot\sin\alpha$$

が成り立つというものである．ただし，$\deg P_n = n$, $\deg Q_n = n-1$ で，P_n と Q_n の両方の最高次の係数が 2^{n-1} である*1．

$n=1$ のときは正しい($P_1(t)=t$, $Q_1(t)=1$)．ある n に対して主張が正しいと仮定すると

---

*1 [訳註]補題の証明にはこれらの多項式が整数係数であることも必要だが，そのことも以下の証明で示されている．

$$\begin{aligned}\cos(n+1)\alpha &= \cos n\alpha \sin\alpha - \sin n\alpha \sin\alpha \\ &= P_n(\cos\alpha)\cos\alpha - Q_n(\cos\alpha)\sin^2\alpha \\ &= P_n(\cos\alpha)\cos\alpha + Q_n(\cos\alpha)(\cos^2\alpha - 1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(n+1)\alpha &= \sin n\alpha \cos\alpha + \cos n\alpha \sin\alpha \\ &= Q_n(\cos\alpha)\sin\alpha\cos\alpha + P_n(\cos\alpha)\sin\alpha \\ &= (Q_n(\cos\alpha)\cos\alpha + P_n(\cos\alpha))\sin\alpha\end{aligned}$$

となる．それゆえ，

$$\begin{aligned}P_{n+1}(t) &= P_n(t)t + Q_n(t)(t^2-1), \\ Q_{n+1}(t) &= Q_n(t)t + P_n(t)\end{aligned}$$

となり，次数と最高次の係数に対する主張が導かれる．

この主張から，

$$\cos n\alpha = P_n\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2^{n-1}}{3^n} + \frac{\text{整数}}{3^{n-1}}$$

であることが示され，これは整数にはなれず，特に，1 になることもない．◀

補題 22.3 が証明されたので，デーンの定理の証明が終わる．◀

22.5　さらなる結果

代数学の言葉では(代数学は読者には専門的過ぎてなじみがないかもしれないが，下の式だけなら説明は要らないのではないだろうか*2)，前節の構成によって，あらゆる凸多面体(実際には必ずしも凸でなくてもよい)にある不変量

$$\mathrm{Dehn}(P) \in \mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Q})$$

*2 [訳註]とは言え，なじみのない読者のために定義だけはしておこう．$\mathbb{R}$ は実数体，$\mathbb{Q}$ は有理数体を表している．$\mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ 加群と考えることが出来，部分 $\mathbb{Q}$ 加群 $\pi\mathbb{Q}$ による商加群 $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$ も $\mathbb{Q}$ 加群と考える．そして，$\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Q})$ は，2 つの $\mathbb{Q}$ 加群の $\mathbb{Q}$ 上のテンソル積を表している．テンソル積は代数学の入門的な教科書(たとえば，シャファレヴィッチ『代数入門』(日本評論社)，永田雅宜『可換体論』(裳華房)など)に載っているので，参照されたい．

を対応させることができ，デーンの定理は，2 つの多面体が**等分割***3 される，つまり，平面によってまったく同じピースの集まりに切り分けられるなら，

$$\mathrm{Dehn}(P_1) = \mathrm{Dehn}(P_2)$$

となる，という言い方ができる．これはまさに前節の結果である．

確かに，これは立方体と 4 面体にでなくても適用できる．話の途中だが，元のヒルベルトの第 3 問題は別の例を扱っている．ヒルベルトは(図 22.6 のような)底面が同じで，高さが同じである 2 つの 4 面体が等分割できないと予想しているのである．

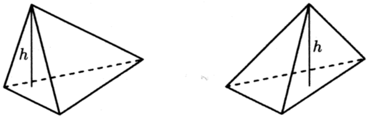


図 22.6　これらの 4 面体は等分割ではあり得ない

この問題は幾何学の基礎に由来している．立体の体積の全理論は，図 22.6 の 4 面体の体積が同じであるという補題に基礎を置いている．同様な(三角形の面積に関する)平面の補題には，切り貼りすることに基づく直接的な幾何的証明がある．しかし，3 次元の事実は，図 22.7 のような図を含む，極限の「階段構成」を必要とする(空間幾何の教科書にはこのような図が載っている)．問題はこのことが本当に必要なのかということであり，その答えは「必要だ」ということである．デーンの定理から容易に，図 22.6 のような 4 面体は，一般には等分割ではないことが導かれる．

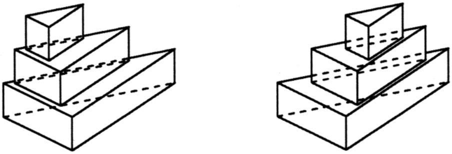


図 22.7　極限過程によって 4 面体の体積を計算する

*3 [訳註]分割合同という術語が使われることが多い．

デーンの研究から60年以上経って，シドラーは，体積が等しく，デーン不変量が等しい多面体が等分割であること(シドラーの定理)を証明した[76]．球面幾何や双曲幾何にも類似の結果がある．

デーン不変量はどんな次元の多面体に対しても一般化される．n 次元多面体 P に対して，

$$\mathrm{Dehn}(P) = \sum_{s\,:\,P\text{ の }(n-2)\text{ 次元面}} (s\text{ の体積}) \otimes (s\text{ での 2 面角}) \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Q})$$

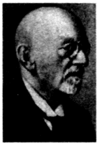
と定義する．(2 面角は，s に隣接する P の 2 つの $(n-1)$ 次元面のなすものである．) 4 次元では，3 次元でのように，2 つの多面体が等分割であるのは，体積とデーン不変量が同じとき，かつそのときに限る．しかし，5 次元では，それはもはや正しくない．新しい「2 次のデーン不変量」が現れる．それは，P の稜に関する和(n 次元多面体のときは $(n-4)$ 次元面に関する和)を含むものである．n 次元多面体の「等分割型」が，$\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ 個の不変量の列によって特徴づけられるという予想がある．体積，デーン不変量，2 次のデーン不変量，それからもっと複雑なテンソル積に値を取るもの(k 次のデーン不変量は $(n-2k)$ 次元面に関する和を含む．特に，1 次元と 2 次元の多面体(線分と多角形)に対しては「体積」(長さと面積)だけが問題であり，3 次元と 4 次元ではさらにデーン不変量があって，そしてさらに高次次元では)というようになっている．

このテーマについてさらに情報が欲しいという方には，ボルチャンスキーの啓蒙書[9]，ブルバキセミナー[13]でのカルティエの講演，それに[25]，[67]，[91]といった書籍を推薦する．

本講の数学を開拓した人びと



マックス・デーン (1878-1952)
ヒルベルトの下でゲッティンゲン大学の学位を得る．フランクフルト大学純粋および応用数学教授に就任したがナチのため職を追われる．スカンジナビア，ロシア，日本を経てアメリカに移住した．ヒルベルトの第 3 問題の解決の他，デーン不変量などに名を残す．第 23 講にも登場．



ダーフィト・ヒルベルト (1862-1943)
不変式論，整数論，代数的整数論，解析学と幾何学の基礎づけ，変分法，偏微分方程式論，積分方程式論，関数解析，数理物理学，数学基礎論など数学のさまざまな分野で現代に影響を与えた．日本語に翻訳された著書も多い．第 19 講(第 2 巻)も参照．

演習問題

22.1 底面が多角形のどんな直方プリズムのデーン不変量も 0 であることを証明せよ．

演習問題 22.2–22.4 はシドラーの定理(22.5 節参照)の特殊な場合である．本書ではこの定理を証明していないので，これらの演習問題は直接的な構成によって解いてほしいということである．

22.2 全体積が等しい，平行 6 面体の 2 つの集まりは等分割であることを証明せよ．

22.3 稜の長さが 1 の正 8 面体 O は，稜の長さが 2 の正 4 面体 $\widetilde{T}$ から，$\widetilde{T}$ に含まれ，$\widetilde{T}$ の 4 頂点を含む，稜の長さが 1 の 4 つの正 4 面体 T を切り離すことによって得ることができる．明らかに $\mathrm{Dehn}(\widetilde{T})=2\,\mathrm{Dehn}(T)$ であるから，

$$\mathrm{Dehn}(O) = \mathrm{Dehn}(\widetilde{T}) - 4\,\mathrm{Dehn}(T) = -2\,\mathrm{Dehn}(T)$$

である．8面体 O と2つの4面体 T の集まりが，体積 $6\,\mathrm{Vol}(T)$ の立方体と等分割であることを証明せよ．

22.4　(a) $\widetilde{T}$ と T を演習問題22.3で考えたものとする．$\widetilde{T}$ が，T の2つのコピーと立方体との集まりと等分割であることを証明せよ．

(b) 一般化．P を任意の多面体とし，$\widetilde{P}$ をそれを2倍に拡大したものとする．その体積は $8\,\mathrm{Vol}(P)$ となる．$\widetilde{P}$ が，P の2つのコピーと体積 $6\,\mathrm{Vol}(P)$ の立方体との集まりと等分割であることを証明せよ．

[ヒント] (a)は演習問題22.3から導かれる．(b)を証明するために，(a)が(必ずしも正4面体ではない)どんな4面体に対しても成り立つことに注意してから，P を4面体の和に切り分けよ．

22.5　全空間が多面体 P と合同な多面体によってタイル貼りされるとき，P を**結晶**と呼ぶ．結晶のデーン不変量が0であることを証明せよ．

第23講 不可能なタイル貼り

23.1 はじめに

この講義は，平面多角形の，他の平面多角形によるタイル貼りに関するものである．そのような問題の次の例はおそらく読者も知っているだろう．

チェス盤から対角線の両端の２つの升(ます)(A1 と H8)を取り除く．この２隅の升のないチェス盤を「ドミノ」でタイル貼りできるだろうか(図 23.1 参照)？

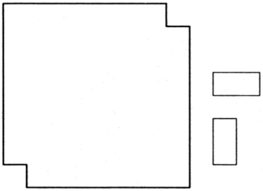


図 23.1　この２隅の升のないチェス盤をドミノでタイル貼りできるか？

ドミノによってタイル貼りしていくと図 23.2 のようなものができる．タイルは重なり合わず(互いにその境界の一部に沿って接し)，盤のどの点もあるタイルに属する．２つのことを注意しておこう．タイルは縦にも横にも置いてよいし，隣接するタイルは辺のすべてを共有しなくてもよい．一般のタイル貼り問題は，次のように定式化される．多角形 P と多角形の集まり $Q_1, Q_2, \cdots$ が与えられたとき，Q_i と合同なタイルを使って P をタイル貼りすることが可能

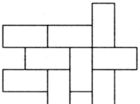


図 23.2　タイル貼りの仕方

か？

読者の中には2隅のないチェス盤の問題を解こうとしてうまくいかない方もあるだろうが，次節に(否定的な)解答を示しておいた．以下では，さらに多くの不可能なタイル貼りの例が出てくるが，証明はだんだん込み入ったものになっていく．

23.2　彩色

2隅のないチェス盤のタイル貼り問題を解くために，チェス盤の升が黒と白に塗り分けられていることを思い出そう．対角線の両端の升はともに黒であり，2隅のないチェス盤には30の黒い升と32の白い升がある．一方，2×1のドミノは黒と白1つずつの升でできている．それゆえ，このタイル貼りは不可能である(図23.3参照)．

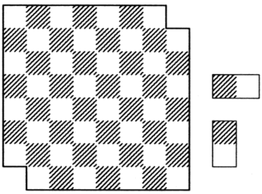


図 23.3　彩色の議論

黒と白の彩色(さいしき)の議論を別の形で行うこともできる．白い升には0を，黒い升には1を書く．2隅のないチェス盤上に書かれた数の和は30である．しかし，ドミノには0と1が1つずつ書かれていて，31個のドミノでは和は31であって，30ではない．こうして，タイル貼りができないことがわかる．

この議論を変形して次の問題を考える．**10×10の正方形を，図23.4に示したようなL型のタイルでタイル貼りが可能か？**　注意しておかなければならないのは，L型のタイルには8通りの異なる向きがあることである．

今度の答えも「できない」というものである．図23.4に示したように，升に1と5を書き込む．すると置かれたタイルには，3つの1と1つの5があるか，3つの5と1つの1があるかのどちらかになる．どちらの場合でも，タイ

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

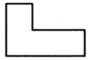


図 23.4　8 を法とする彩色

ル上で数を数えると和は 8 の倍数になる．一方，盤上の数の和は 300 であって，8 で割り切れない．それゆえ，このタイル貼りも不可能である．

23.3　彩色の議論でできないこと

次のような 2 種類のタイルがあると想像してみよう．通常の正のタイルと，「反物質」から作られた負のタイルとがあって，その正と負のタイルを，共通部分が互いに対消滅するように，重ね合わすことが許されるとする(図 23.5 参照)．正のタイルの上に 1 を書き，負のタイルの上に -1 を書くと便利である．ある点を覆うすべてのタイルに書かれた ± 1 の総和をこの点の**重複度**と呼ぶことにしよう．多角形 P の**符号付き**タイル貼りとは，負や正のタイルを重ね合わせて，P の内部のあらゆる点の重複度の 1 にすることを言う．

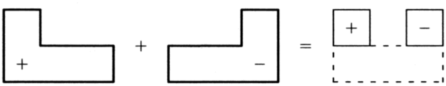


図 23.5　タイルと反タイル

明らかに，もしも 23.2 節で議論したような彩色の議論を使い，ある多角形 P がタイルのある集まりによってタイル貼りできないことが証明されるのであれば，その証明から符号付きのタイル貼りが存在しないことも導かれる．しかし，符号付きタイルでは解があるけれど，正のタイルだけでは解がないような，タイル貼り問題が存在するのである．

図 23.6 のような，一番外の辺の点の数が n の，三角形の点の列を考える．この三角形を，3 点からなる「三点棒」によって覆いたい．三点棒は図示した 3 つの向きのどれかの向きをしているとする．**どのような値の n に対して，そのようなタイル貼りが存在するか？**

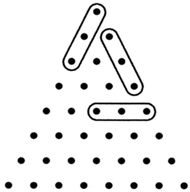


図 23.6　三角形を三点棒で彩色することができるか？

そのようなタイル貼りが存在するためには，まず何よりも，三角形の点の数が 3 の倍数でなければならない．この点の数は $n(n+1)/2$ であるので，$n \equiv 0$ または 2 mod 3 である．

今度は，図 23.7 に示したように点を「彩色」する．すると，1 枚のタイルで覆われる数の和は 3 で割り切れる．三角形上の総和は，mod 3 で考えると，n に関して周期的で，周期は 9 であり，n について順に

$$0,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0$$

となる．したがって，n mod 9 は 1 か 8 か 0 のどれかにならなければならないが，既に $n \equiv 0$ または 2 mod 3 であることが分かっているので，検討すべき

0
1 1
2 2 2
0 0 0 0
1 1 1 1 1
2 2 2 2 2 2
0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1
2 2 2 2 2 2 2 2 2
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

図 23.7　3 を法とする彩色

なのは $n \equiv 8$ または 0 mod 9 の 2 つの場合だけである.

$n \equiv 8$ または 0 mod 9 であれば，三角形の配列を三点棒によって，符号付きのタイル貼りができることを示そう．図 23.8 には $n=8$ に対するそのようなタイル貼りが描かれている．図 23.9 には，サイズ 8 のそのような三角形と 1 行に並べた三点棒から，より大きな配列をどのようにして作ることができるかが示されている.

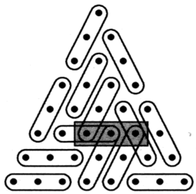


図 23.8 $n=8$ に対する符号付きタイル貼り

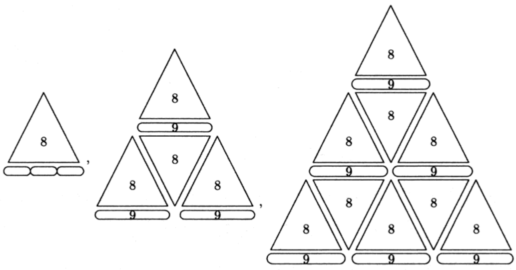


図 23.9 小さい符号付きタイル貼りから大きなものを作る

この節の締めくくりに次の驚くべき定理を述べておく．この定理は彩色の議論で出来る範囲を超えている.

定理 23.1 あらゆる n に対して，サイズ n の三角形の配列は三点棒によってタイル貼りすることはできない.

23.4　コンウェイのタイル貼り群

定理23.1を証明するために少し準備が必要となる．アイデアを整理するために，すべての多角形，つまりタイル貼りする領域とタイルが方眼紙上に描かれている，つまり，単位正方形からなるものと仮定する．問題にする多角形には穴があいていないこと，つまり，境界が単純閉曲線からなることを仮定する．

正方グリッド上の道は4つのシンボル x, x^{-1}, y, y^{-1} に関する語[*1]で表される．右への1歩を x，左への1歩を x^{-1}，上への1歩を y，下への1歩を y^{-1} と書く．たとえば図23.10を参照．シンボル x や x^{-1} を k 個続けることを $x^{\pm k}$ と書き，y に対しても同じようにし，また自明な道(まったく動かない道)を e と書く．また，x と x^{-1} を続けたり，y と y^{-1} を続けると相殺する．たとえば，$xyy^{-1}x^{-1}=e$ である．

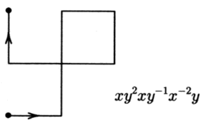


図 23.10　道とその語

2つの語 a と b の合成 ab を次のように定義する．a と b を連結しておいて[*2]，すべての x と x^{-1} や y と y^{-1} が連続しているところを相殺して切り詰める．その結果として得られる語を ab と書く．

合成は結合律 $(ab)c=a(bc)$ を満たす．ここで，a, b, c はどんな語でもよい．語 w が与えられたとき，語 w^{-1} は w から，文字を右から左に読んでいき，指数を反対のものに変えることで得られたものとする．たとえば，$(xy^{-1})^{-1}=yx^{-1}$ である．明らかに $ww^{-1}=e$ である[*3]．

グリッドの上に置かれるタイルの可能な向きの完全なリストを $T_1, \cdots, T_n$ と

[*1] [訳註]指定されたシンボル(アルファベットともいう)の有限列のこと．
[*2] [訳註] a の次に間を置かずに b を続けることを，a と b を連結するという．
[*3] [訳註]もちろん，どんな語 w に対しても $ew=w=we$ となる．

する(ドミノでは2つ，Lの形のタイルでは8つの異なる向きというリストになる)．T_iの境界上に出発点pを選び，この境界を反時計回りに1周する．この閉じた道はx, x^{-1}, y, y^{-1}に関する語W_iで符号化される．この語はもちろん出発点の取り方に依存する[*4]．

これまでのところ，語を扱う規則は

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e = yy^{-1} = y^{-1}y$$

だけである．この規則に新しい規則$W_1{=}W_2{=}\cdots{=}e$を追加しよう．この規則は，長い語の中に語W_iのどれかが出てくるたびにそれをeで置き換えてもよいこと，逆に，語W_iをどこに挿入してもよいことを意味している．もし，語V_1が別の語V_2からこれらの規則を次々と使って得ることができるならば，この2つは同値であると言い，単に$V_1{=}V_2$と書くことにする．

語W_iの選び方のあいまいさ，つまり出発点への依存性に注意する必要がある．p'をタイルT_iの境界上の別の出発点とし，p'から出発して境界を1周することで得られる語をW_i'とする．

補題 23.1　$W_i'{=}e$が成り立つ．

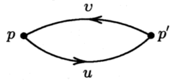


図 23.11　補題 23.1 の証明のために

証明▶ uをpからp'への道(の符号)とし，vをp'からpへの道とする(図 23.11 参照)[*5]．すると，$W_i{=}uv$であり，$W_i'{=}vu$である．$W_i{=}e$だから，$uv{=}e$である．それゆえ，$vu{=}(u^{-1}u)(vu){=}u^{-1}(uv)u{=}u^{-1}u{=}e$となって，主張が示された．◀

Pを多角形とする．その境界を1周して語Uが得られたとする(今度も出発点に依存している)．次の命題は，タイル貼りに対する必要条件を与えている．

---

*4　[訳註]もちろん，出発点は格子点に取っている．
*5　[訳註]進み方は境界上を反時計回りに取っている．

命題 23.2　P が $T_1,\cdots,T_n$ によってタイル貼りされれば，$U=e$ である．

証明▶ タイルの数に関する帰納法で証明する．タイルの数が1であれば，P 自身がタイルであり，たとえばそれを T_i とする．そのとき，U は上で W_i' と呼んだものであり，主張は補題 23.1 から導かれる．

今度はタイルの数が2以上であるとする．そのとき，多角形 P を，ある境界点 p から別の境界点 p' への，タイルの境界だけを通る，P の内部の道によって，2つの多角形 P_1 と P_2 に切り分けることができる(図 23.12 参照)．P の内部のこの道 pp' に対応する語を w とし，v_1 と v_2 を，それぞれ p から p' へと，p' から p への P の境界(の道の)語とする．

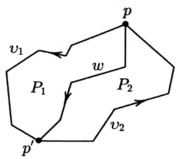


図 23.12　命題 23.2 の証明の帰納法のステップ

点 p を出発して，P の境界に沿った反時計回りの閉じた道は語 v_1v_2 によって符号化される．$v_1v_2=(v_1w^{-1})(wv_2)$ である．括弧の中の語は P_1 と P_2 の境界(を表す)語である．切り分けの道 pp' の選び方により，これら2つの多角形はより少ない数のタイルでタイル貼りされている．帰納法の仮定により，$v_1w^{-1}=e$ かつ $wv_2=e$ である．したがって $v_1v_2=e$ でもある*6．

最後に，境界語 U は v_1v_2 と，出発点の取り方が違っているかもしれない．既に補題 23.1 から，出発点の違う2つの語の一方が e と同値なら，他方もそうであることが示されている．これで証明が終わる．◀

本節で行った構成を群の言葉でまとめておくと便利なことがある．タイルの集まり $T_1,\cdots,T_n$ から，2つの生成元 x と y を持ち，関係式が $W_1,\cdots,W_n$ であるような群が定まる*7．この群は**コンウェイのタイル貼り群**と呼ばれる．

---

*6　[原註]この議論と，多角形のガウス=ボネの定理 20.3 の証明の議論との類似性に注意せよ．

*7　[訳註]x,x^{-1},y,y^{-1} に関するすべての語に，$xx^{-1}=x^{-1}x=e=yy^{-1}=y^{-1}y$ と $W_1=\cdots=W_n=e$ という規則を考えると，自明な語 e を単位元とする群が定義される．

多角形 P の境界語はコンウェイのタイル貼り群の元であり，P が $T_1, \cdots, T_n$ によってタイル貼りされるならば，この元は単位元になる．

例 23.3 本講の最初に考えた 2 隅のないチェス盤の問題に戻ろう．

2×1 のドミノの 2 つの置き方の境界語は $W_1=x^2yx^{-2}y^{-1}$ と $W_2=xy^2x^{-1}y^{-2}$ であり，2 隅のないチェス盤の境界語は $U=x^7y^7x^{-1}yx^{-7}y^{-7}xy^{-1}$ である (図 23.13 参照)．等式 $W_1=W_2=e$ からは $U=e$ を導けないことを示したい．そうすれば，命題 23.2 によって，2 隅のないチェス盤がタイル貼りできないことになる．

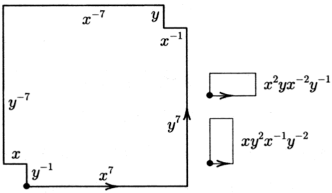


図 23.13 2 隅のないチェス盤をもう一度考える

x を置換 (213) に，y を (132) に置き換える．すると，x^2 と y^2 はともに自明な置換 (123) となり，それゆえ語 W_1 と W_2 もまた自明になる．このことから，もし $U=e$ であれば，x と y を置換 (213) と (132) で置き換えれば，自明な置換が得られなければならない．

しかし，実際はそうはなっていない！ U からは置換 (312)，つまり自明でない置換が得られる[*8]ことが容易に確かめられる．

---

*8 [原註]群論の言葉では，コンウェイのタイル貼り群から，3 文字の置換群への準同型を構成したということである．そして，この準同型が，2 隅のないチェス盤の境界語を自明でない置換に写しているのである．
[訳註]置換の表示法と演算の仕方については日本の多くの教科書とは異なっている．本書での使用法は第 1 巻 5.6 節に説明があるので，詳しくはそちらを参照されたい．本書での置換 (i_1, i_2, i_3) は普通 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}$ と書かれるもので，巡回置換ではないことに注意する．また，ここで自明な置換と言っているものは 5.6 節では恒等置換と呼ばれている．
　この準同型を φ と書くと，$\varphi(x)=(213)$, $\varphi(y)=(132)$ とするということで，$\varphi(x^2)=(213)(213)=(123)=\varphi(e)=\varphi(y^2)$ だと言っている．これから，$\varphi(x^{-1})=\varphi(x)=\varphi(x^7)$, $\varphi(y^{-1})=\varphi(y)=\varphi(y^7)$ が得られ，$\varphi(U)=\varphi(xy)^4$ であることが分かり，直接計算で $\varphi(xy)=(312)$ であることがわかる．$(312)^3=(123)$ は恒等置換になるので，$\varphi(U)=(312)$ となる．

23.5　定理 23.1 の証明

▶ 定理 23.1 が例 23.3 と比べて，しなければならないことが多いというのは，驚くようなことではない．結局のところ，2 隅のないチェス盤の問題には易しい彩色の解法があるのだから．

まず最初に，23.3 節で，$n \equiv 8$ または $0 \bmod 9$ であることがタイル貼りのための必要条件であることが分かっている．もし $n \equiv 8 \bmod 9$ に対してタイル貼りが存在するなら，図 23.9 に示したように，$n \equiv 0 \bmod 9$ に対してもタイル貼りが存在する．こうして，n が 9 の倍数のときにタイル貼りが存在しないことを証明すれば十分である．

点の三角形の配列を，方眼紙上の階段状の多角形に描き直す．最初の行には 1 つの正方形，2 番目の行には 2 つ，などのようにする．そのとき，三点棒は図 23.14 に描かれた種類のタイルになる．図にはまた，これらの多角形の境界語も示してある．あらゆる n に対して，$U_n = e$ が等式 $W_1 = W_2 = W_3 = e$ からは

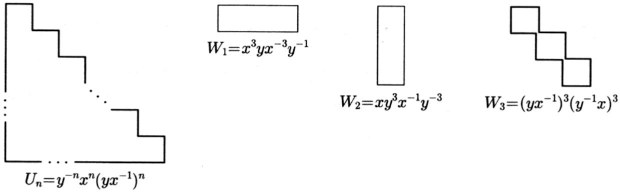


図 23.14　タイルと対応する語

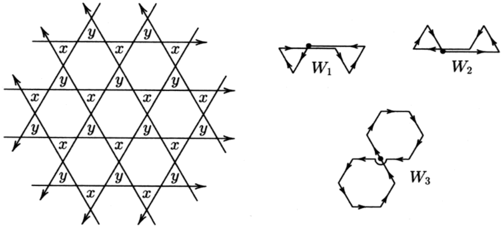


図 23.15　6 角グリッド：3 つのタイルの影

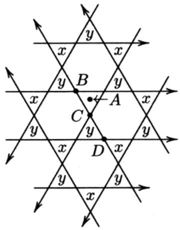


図 23.16　6 角グリッドの対称性

導かれないことを証明したい．

規則的に置かれた 3 つの向きづけられた平行直線族を考える(図 23.15 参照)．これらの直線は 60° の角度で交わり，正三角形と正 6 角形による平面の敷詰(しきつ)めを形成する．図 23.15 に示されているように三角形の中に文字 x と y を書く．この直線と文字のパターンを 6 角グリッドと呼ぶことにする．

6 角グリッドは非常に対称的である．あらゆる 2 頂点に対して，一方の頂点を他方に移し，グリッドを保つような平面の運動が存在する．たとえば，図 23.16 で，平行移動によって頂点 B は D に移されるし，x という印のある三角形の中心である点 A の周りの 120° の回転によって頂点 B は C に移される．

正方グリッド上の道は以下のようにして，6 角グリッド上に影を映すと考えることができる．正方グリッド上の道は x, x^{-1}, y, y^{-1} に関する語で符号化されている．6 角グリッド上のあらゆる頂点では，2 本の向きづけられた直線が交わり，4 つの交角のうちの 2 つに x と y のラベルが付いている(図 23.15 参照)．シンボル x, x^{-1}, y, y^{-1} を影の道を作るための指図と解釈する．つまり，$x^{\pm 1}$ はそれぞれその向きに沿ってか反対向きにかに「x というラベルの角の境界を 1 つ分進み」，$y^{\pm 1}$ に対しても同じようにする．こうして，いったん出発点を選べば，正方グリッド上の道は 6 角グリッド上の道を定めることになる*9．

図 23.15 は，図 23.14 の 3 つのタイルの境界の道の，6 角グリッド上の影を

*9 [訳註]この 6 角グリッド上の道を正方グリッド上の道の影とイメージするのである．

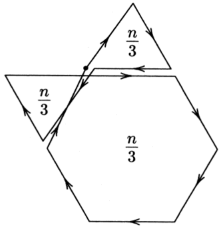


図 23.17　階段領域の影

示している*10．3つすべての影の道が閉じた道であることに注意する．6角グリッドの対称性により，この事実は，影の道の出発点をどう取っても成り立っている．これと反対に，1つの正方形の境界である道 $xyx^{-1}y^{-1}$ の影は閉じていない．

6角グリッド上の影が閉じた道であるような，正方グリッド上の道だけを考えることにしよう．3つのタイルの境界の道はこの性質を満たすので，図23.14の階段領域の境界の道もそうなっている．その影は図23.17に示されている(n が3の倍数であるという仮定を使っている)*11．

向きづけられた閉曲線は，平面をいくつかの成分に分割する．各成分には，この成分のどんな点でもよいが，その点に関する回転数が対応する．この概念は第12講で議論した(第2巻，図12.20参照)．閉曲線に囲まれた領域の符号付きの面積は，各成分の面積に，対応する回転数を掛けたものの和であるとする．たとえば，反時計回りに向きづけられた単位円周は符号付きの面積 π を持ち，時計回りに向きづけられた単位円周は符号付きの面積 $-\pi$ を持つ．解析学では，符号付きの面積は，微分形式 xdy の曲線上の積分として定義される．

正方グリッド上の道に，6角グリッド上の影によって囲まれた領域の符号付きの面積を対応させる．3つのタイルの境界の道に対してはこの符号付き面積は0であり(図23.15参照)，階段領域の境界の道に対しては負である(図23.17参照)．

---

*10 [訳註]6角グリッド上の出発点の選び方によっては図23.15の右の道ではないものになることがあるが，その場合でも $\pm 120°$ 回転すれば図のものが得られる．

*11 [訳註]この図で領域に $\dfrac{n}{3}$ とあるのは，$\dfrac{n}{3}$ 周することを表している．

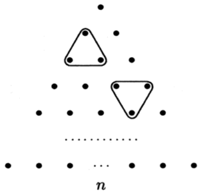


図 23.18　大きな三角形を小さい三角形でタイル貼りできるか？

このことから $U_n \neq e$ が導かれる．実際，語 W_1, W_2, W_3 のどれかを e に置き換えたり，反対に e を W_1, W_2, W_3 のどれかに置き換えても，影の道の符号付き面積は変わらない．この面積は自明な語 e に対しては 0 であるが，語 U_n に対しては 0 でない．これで定理 23.1 の証明は終わる．◀

この節の終わりに，定理 23.1 と同じように証明できるもう 1 つの定理を述べておく．同じ三角形の点の配列から始めるのだが，今度は 3 点からなる三角形でタイル貼りがしたい(図 23.18 参照)．

定理 23.2　そのようなタイル貼りが存在するには，$n \equiv 0, 2, 9, 11 \mod 12$ であることが必要十分である．

コンウェイのタイル貼り群についてさらに知りたければ，[17], [65], [85] を参照するとよい．

23.6　マックス・デーンに戻って

ヒルベルトの第 3 問題を解いた後，1903 年に M. デーン[21]は次の定理を証明した．

定理 23.3　長方形が(大きさは異なってよい複数の)正方形によってタイル貼りされるなら，その辺の長さの比は有理数である．

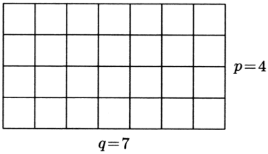


図 23.19　長方形の辺の比が有理数なら，正方形でタイル貼りされる

逆は明らかに正しい(図 23.19 参照)．以下の証明は，22.3 節で行ったことにとてもよく似ている*12．

証明▶ 背理法で示そう．長方形の辺の長さを，幅が 1 で，高さが無理数 x であるとすることができる．

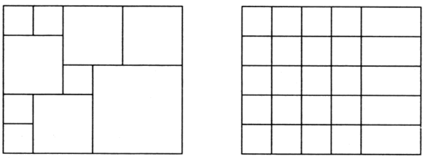


図 23.20　タイルの辺を延長する

正方形によるタイル貼りが存在すると仮定する．それらの正方形たちの辺を，長方形の幅や高さ全体まで延長する(図 23.20 参照)．今度は，元の $x\times 1$ の長方形，およびすべての正方形タイルの，より小さな長方形によるタイル貼りが得られていることになる．$a_1, \cdots, a_N$ をこれらの長方形の辺の長さとする(順序はどうでもよい)．数列

$$1,\ x,\ a_1,\ \cdots,\ a_N \tag{23.1}$$

を考え，この中から先行する項の有理線形結合になっている項を取り除く．x は無理数なのでこの数列に残っている．$b_1=1$, $b_2=x$, b_3, $\cdots$, b_m を残った数とする．22.3 節で示したように，(23.1)の数はそれぞれ，$b_1, \cdots, b_m$ の一意的な有理線形結合である．

f を，数 $b_1, \cdots, b_m$ については

*12 [原註]この類似性があるので，タイル貼り問題の講義を多面体の講義に一緒にしている．

$$f(1)=1,\quad f(x)=-1,\quad f(b_3)=\cdots=f(b_m)=0$$

とし，数 $b_1,\cdots,b_m$ の有理線形結合に対しては線形性

$$f(r_1b_1+\cdots+r_mb_m)=r_1f(b_1)+\cdots+r_mf(b_m)$$

によって拡張して得られる関数とする．こうすると，もし u と v が数 $b_1,\cdots,b_m$ の有理線形結合ならば，

$$f(u+v)=f(u)+f(v) \tag{23.2}$$

となる．つまり関数 f は加法的である．

ともに数 $b_1,\cdots,b_m$ の有理線形結合である u と v が辺の長さであるような長方形を考える．この長方形の「面積」を $f(u)f(v)$ と定義する．もしそのような 2 つの長方形が水平の辺か垂直の辺を共有するならば，その 2 つを合わせて大きい長方形を作ることができ，関数 f の線形性(等式(23.2))により，この大きい長方形の「面積」は 2 つの小長方形の「面積」の和になる．

したがって，$x\times1$ 長方形の「面積」は，それをタイル貼りする正方形たちの「面積」の和になる．前者は $f(x)f(1)=-1$ であるが，$u\times u$ 正方形の「面積」は $f(u)^2$ であって，非負の数となる．これは矛盾である．◀

23.7 正方形によるタイル貼りと電気回路

図 23.21 のような，正方形による長方形のタイル貼りを考える．$x_1,\cdots,x_9$ を正方形の辺の長さとする．この図の水平または垂直な各線分に対して，変数 x_i の間に線形関係が成り立っている．これらの線形関係は，ある線分の長さを，その線分の両側に隣接する正方形の辺の和として表すものである．図 23.21 のタイル貼りでは，これらの関係は

$$\begin{aligned} &x_2=x_4+x_5,\quad x_3+x_5=x_6,\\ &x_1+x_4=x_7+x_8,\ x_6+x_8=x_9 \end{aligned} \tag{23.3}$$

(水平な線分に対するもの)と

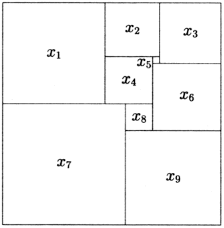


図 23.21　正方形によるタイル貼り

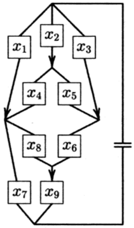


図 23.22　図 23.21 のタイル貼りに対応する回路

(23.4)　　$x_1 = x_2+x_4,\quad x_7 = x_8+x_9,\quad x_4+x_8 = x_5+x_6$

(垂直な線分に対するもの)となる．タイル貼りが存在するなら，この線形方程式系にはすべての解が正であるものが存在するはずである．図 23.21 のタイル貼りは

$$x_1 = 15,\quad x_2 = 8,\quad x_3 = 9,\quad x_4 = 7,\quad x_5 = 1,$$
$$x_6 = 10,\quad x_7 = 18,\quad x_8 = 4,\quad x_9 = 14$$

という解に対応している．もちろん，これらの数にどんな因数を掛けたものも解になる．

方程式(23.3)と(23.4)は電気回路に対するキルヒホッフの法則として解釈することができる．電気回路の例が図 23.22 に示されている．すべての抵抗器の抵抗値が 1 で，電流の値が数 x_i で与えられているとする．キルヒホッフの法則は 2 つある．頂点方程式*[13]とは，あらゆる頂点に流れ込む電流と流れ出す

電流は等しいというものであり，メッシュ方程式*14とは，閉じた道を回る電圧降下は0であるというものである．抵抗の値が1なので，オームの法則により，i番目の抵抗器での電圧降下は電流x_iに等しい．図23.22の回路に対する頂点方程式はまさに方程式(23.3)であり，メッシュ方程式は方程式(23.4)である．

図23.22の回路は図23.21のタイル貼りから次のようにして構成される．水平線分には電気回路の頂点を対応させ，タイル貼りにおける正方形は抵抗器に対応させる．抵抗器が2つの頂点を結ぶのは，対応する正方形が2本の対応する水平線に隣接するときとする．この構成法は，長方形の正方形による任意のタイル貼りに適用でき，電気回路が得られる．

上の頂点と下の頂点の間の電圧降下を選ぶとすべての抵抗器における電流が決定され，方程式系(23.3)-(23.4)の解が得られる．特に，系(23.3)-(23.4)は，共通因子を除いて一意的な解を持つ．同じ結論が，長方形の正方形によるタイル貼りに対しても成り立つ．この方法の欠点は，電流の符号を制御できないことである．電流が0になったり負になったりするかも知れず，(すべての電流が正という解でないときは)回路は正方形によるタイル貼りに対応しない．

23.8 整数辺を持つ長方形によるタイル貼り

定理 23.4 長方形Rが，どちらかの辺の長さが整数の長方形によってタイル貼りされているとすると，Rには長さが整数の辺がある．

このタイル貼りの定理には記録的な数の異なる証明がある([87]には14の証明が与えられており，さらにその他にも証明が知られている)．ここでは最もエレガントなものを選んだ．

*13 [訳註]電流則，ノード法則，第1法則ともいわれるもの．グラフ理論では頂点というが，電気の方ではノード(節点，結節点)ということが多い．

*14 [訳註]電圧則，ループ法則，第2法則ともいわれるもの．

証明▶ 積分区間の長さが整数のとき，積分 $\int \sin 2\pi x \; dx$ は 0 である．そのことから，各タイル上の 2 重積分

$$\int\int \sin 2\pi x \sin 2\pi y \; dxdy$$

は 0 になる．それゆえ，この 2 重積分の長方形 R 上での値もまた 0 になる．R の左下角の頂点が原点であり，辺の長さが a と b であると仮定すると，

$$0=\int_0^a\int_0^b \sin 2\pi x \sin 2\pi y \; dxdy = \frac{1}{(2\pi)^2}(1-\cos 2\pi a)(1-\cos 2\pi b)$$

となる．これから，$\cos 2\pi a=1$ か $\cos 2\pi b=1$ のどちらか，つまり a か b のどちらかが整数であることが導かれる．◀

定理 23.4 から興味深い結論が得られる．$m\times n$ 長方形が $p\times q$ 長方形によってタイル貼りされていると仮定する（数 m,n,p,q は整数）．もちろん，このことから pq が mn を割ることになるが，さらに次のことを言うことができる．

系 23.5　数 p が m と n のどちらかを割り，q も m か n かを割る．

証明▶ 長さに数 $1/p$ を掛けると，今度は $(m/p)\times(n/p)$ 長方形が $1\times(q/p)$ 長方形でタイル貼りされることになる．定理 23.4 によって，m/p か n/p かは整数であり，つまり p は m か n かを割る．q に対しても同様である．◀

23.9　等しい面積の三角形によるタイル貼り：ちょっとだけ

最後に，極めて興味をそそるもう一つの「不可能タイル貼り」の結果に触れないわけにはいくまい．「正方形を，奇数個の同じ面積の三角形でタイル貼りすることは不可能である」(偶数個のタイルでなら可能なのである．図 23.23 参照)．この定理は比較的新しく（1970 年），証明は非常に意外なものである．さらに驚くべきことだが，恐らく，同じ面積のどんな個数の三角形によってもタイル貼りすることができない 4 角形が存在する．その解説は[75]の第 5 章を見るとよい．

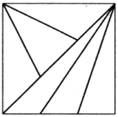


図 23.23 等しい面積の三角形によるタイル貼り

本講の数学を開拓した人びと



ジョン・コンウェイ (1942 年生まれ)
有限数学，整数論，トポロジー，群論，数理論理学などを研究．2 人ゲーム，ライフゲーム，超現実数などの新しい概念のほか，3 つの散在型単純群の発見など業績多数．コンウェイ群，コンウェイパズル，コンウェイの宇宙定理など多種多様な概念に名前を残す．



マックス・デーン (1878-1952)
トポロジーに群表示の問題を導入する．特に「語の問題」「同形問題」の定式化をした．トポロジーの名を持つ初めての体系的な教科書を，ヒーガードと共に著す．それまではトポロジーは位置解析学と呼ばれていた．第 22 講も参照．

演習問題

23.1 図 23.24 の多角形をドミノでタイル貼りできるか？



図 23.24 彩色の議論の変形

23.2 チェス盤の角の黒と白の升を取り除く．その2隅のないチェス盤がドミノでタイル貼りできることを証明せよ．

［ヒント］チェス盤のすべての升を囲む閉じた道を考え，それに沿ってドミノを置け．

23.3 10×10 正方形は 1×4 長方形でタイル貼りができないことを示せ．

［ヒント］4彩色を使え．

23.4** 定理23.2を証明せよ．

23.5 図23.25の多角形が正方形によってタイル貼りできないことを証明せよ．（反タイルを使ってよければ，明らかに可能である！）

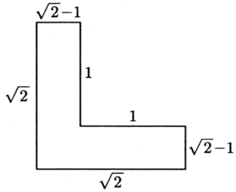


図 23.25　この領域は正方形によってタイル貼りできない

23.6 $x=2-\sqrt[3]{5}$ とする．正方形を，$1\times x$ 長方形に相似な3つの長方形によってタイル貼りせよ．

コメント． 正方形が $1\times x$ 長方形に相似な長方形でタイル貼りすることができるのは，x が整数係数の多項式の根であるとき，かつそのときに限る．そして，x が満たす最低次数の多項式に対して，あらゆる根 $a+ib$ は $a>0$ を満たす．[30]参照．

23.7 「反物質」で作られたタイルを使うことを許したとしても定理23.3が成り立つことを示せ．

［ヒント］$u\times v$ 長方形の「面積」を $uf(v)-vf(u)$ と再定義せよ．この面積も加法的で，すべての正方形に対して0になる．

23.8 $(1/2)\times(1/2)$ の升を持つ無限のチェス盤を考えることによって，定理

23.4 の彩色での証明を与えよ．

コメント． 関数 $\sin 2\pi x \sin 2\pi y$ を関数 $(-1)^{[2x]}(-1)^{[2y]}$ で置き換えても，これは同じである．

第24講　多面体の剛性

24.1　コーシーの定理

凸多面体 P の厚紙モデルを稜に沿って切ると，かなりの数の多角形が得られる．これが多面体 P の面である．面 F_i と F_j が稜 E_k を共有するとき隣接するというが，その隣接の完全なリストを作ることができる．このリストに従って，P と同じように同じ稜に沿って面をくっつけて多面体 P' を作る．当然のこととして，この P' が P と合同になるだろうか？

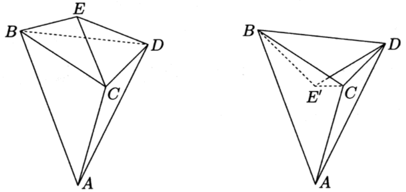


図 24.1　2 つの多面体は合同な面を持ち，組み合わせ論的には同じである

答えは，P' が凸な多面体であるかどうかに依存する．凸であるという仮定がなければ，多面体は一意的には定まらない(図 24.1 参照)．しかし，凸多面体に対しては次のコーシーの定理(1813)がある．

> **定理 24.1**　2 つの凸多面体の対応する面が合同で，同じように隣接していれば，多面体も合同である．

平面では，類似の主張は明らかに成り立たない．三角形以外のあらゆる多角形は，辺の長さが同じままで，角を変えるような変形が可能だからである(図 24.2 参照)．

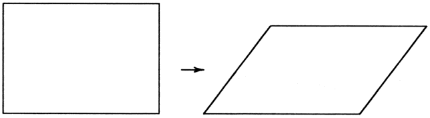


図 24.2　平面多角形は変形できる

定理24.1の1つの帰結がコーシーの剛性定理「凸多面体は変形することができない」である．より正確な定式化は次のようになる．

> **系 24.2**　凸多面体を，すべての面が自身と合同なまま連続的に変形するのであれば，できた多面体も元の多面体と合同である．

この結果は，第25講で述べることになる，柔軟な(凸でない！)多面体の構成とはまるで対照的である．

コーン=フォッセンが示したコーシーの定理の連続版は，滑らかで凸な閉曲面(卵形面)は剛性を持つというものである．つまり，等長変形は剛性を持つ運動になる[*1]．凸でない滑らかな閉曲面を自明でない等長変形することができるかどうかは知られていない．

24.2　コーシーの定理の証明

▶ 証明は2つの補題に基づいている．最初の補題は組み合わせ論的である(または，トポロジー的であると言ってもよい)．

凸多面体の頂点に隣接するいくつかの稜に＋か－の印がついていると仮定する(印がついていない稜もある)．頂点の周りを1周してみて，稜の符号に注意する．負の稜の後で正の稜が来るか，正の稜の後で負の稜が来るかしたとき，符号変化が起きたと言う．印のない稜は無視する．たとえば，図24.3では4回の符号変化がある．

---

*1　[訳註]等長変形とは変形であって，任意の2点間の距離を保つもののことだが，滑らかな卵形面であれば，それが立体として合同なまま変形され，つまりは物体を動かしているだけと考えることができるということ．

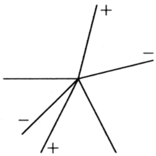


図 24.3 4 回の符号変化

補題 24.1 凸多面体のいくつかの稜に + か − の印がついていると仮定する．少なくとも 1 つの印のついた稜に隣接する頂点には印をつけよう．そのとき，印のついた頂点で，この頂点の周りでの符号変化が高々 2 回のものがある．

第 2 の補題は幾何学的なものである．2 つの凸な球面(または平面) n 角形 P_1 と P_2 で，対応する辺の長さが等しいものを考える．P_1 の頂点に，P_1 の角が P_2 の対応する角よりも大きいか小さいかに従って，+ か − かの印をつける．角が等しければ，頂点に印をつけない．

補題 24.2 印のある頂点があれば，つまり，多角形が合同でなければ，多角形 P_1 を 1 周するとき少なくとも 4 回の符号変化がある．

一言説明をしておくべきだろう．球面幾何では，直線の役割をするのは大円である．2 点間の最短の線分は，この 2 点を通る大円の劣弧(れっこ)(短い方の弧のこと)になる．こう規約をすれば，凸性の定義は平面の場合と同じである．

恐らく，補題 24.2 は，4 という数を含む一連の幾何の定理(4 頂点定理など)の中で歴史的に最初に示されたものだろう．第 2 巻第 10 講ではいくつもこの種の定理の議論をした．

本講の残りでは．補題 24.1 と補題 24.2 の証明を行う．しかしまず，この 2 補題からコーシーの定理を導いておこう．

コーシーの定理の証明▶ 2 つの凸多面体 S_1 と S_2 の面が合同で，同じように隣接していると仮定する．もし多面体が合同でないならば，対応する 2 面角のなかに等しくないものがある．S_1 の稜に，S_1 での 2 面角が S_2 の対応する稜のものより大きいか小さいかに従って，+ または − の印をつけ，角が等し

いときには，稜に印をつけないものとする．

補題 24.1 により，多面体 S_1 の頂点 V_1 で，何本かの印のついた稜に隣接しており，その周りでの符号変化が 2 回以下のものが存在する．V_2 を対応する S_2 の頂点とする．V_1 と V_2 を中心とする単位球面を考える*2．V_1 と V_2 に隣接する S_1 と S_2 の面は，球面多角形 P_1 と P_2 に沿って球面と交わる．したがって，P_1 と P_2 の対応する辺は等しい．

球面多角形 P_1 と P_2 の頂点は，S_1 と S_2 のそれぞれの稜と球面との交点であり，P_1 と P_2 の角は S_1 と S_2 のそれぞれの 2 面角に等しい．それゆえ，補題 24.2 に述べたように，多角形 P_1 の頂点につけた印は，2 面角によって定めた，多面体 S_1 の稜の印と一致する．特に，P_1 の周りの符号変化の数は 2 より大きくはない．しかし，補題 24.2 によって，この数は少なくとも 4 であり，矛盾となる．◀

24.3　オイラーの定理と補題 24.1 の証明

古典的なオイラーの定理は凸多面体の頂点の数 v，稜の数 e，面の数 f の間に $v-e+f=2$ という関係があるというものである．たとえば，正 12 面体は 20 個の頂点，30 本の稜，12 の面を持ち，$20-30+12=2$ となっている．

ここでは，球面上のグラフに関して少し一般化した結果が必要となる(中心が多面体の内部にあるような球面の上に凸多面体を中心射影すると，そのようなグラフが得られる)．v, e, f を，その頂点，辺，面の数とし，c をグラフの成分の数とする．

定理 24.3　次が成り立つ．

$$v-e+f = c+1. \tag{24.1}$$

証明▶ 議論は辺の数に関する帰納法で行われる．

---

*2 [訳註]もちろん，半径は同じで十分小さくしておかなければならない．

グラフが結合価 1 の頂点，つまり，ちょうど 1 本の辺(これを E とする)に隣接した頂点 V を持つと仮定する[*3]．V と E を取り除く(しかし，E のもう一方の端点は除かない)．すると，数 v と e は 1 だけ減る．辺 E は面を分離しないので，数 f は変わらないままであり，グラフの成分の数 c も変わらない．したがって，数 $v-e+f-c$ は変わらない．

次に，すべての頂点の結合価が 2 以上であると仮定する．すると，グラフに自己交差しない閉じた道が存在する．実際，頂点を 1 つ選んで，V_1 と呼ぶ．この頂点から出て行く辺がある．この辺のもう 1 つの端点 V_2 に行く．V_2 の結合価は 2 以上なので，V_2 から出て行く別の辺がある．V_3 をこの辺のもう 1 つの端点とする，というように続けていく．これを，既に通ったことのある頂点に初めて戻るまで続ける．これで自己交差しない閉じた道が得られる．

この道は球面を 2 つの成分に分割する(ジョルダンの定理の議論に対しては第 26 講参照)．この道から 1 本の辺を取り除く(が，その端点は取り除かない)．そのとき，数 f は 1 減り，e も 1 減るが，v と c は同じままである．このときも $v-e+f-c$ は変わらない．

すべての辺が取り除かれるまで，このように続けていく[*4]．そのとき，グラフは v 個の孤立した頂点からなるものになる．$f=1$ 個の面があり，$c=v$ 個の成分があるので，関係式(24.1)が成り立っている．◀

さて，補題 24.1 の証明に進もう．凸多面体の印のある稜が作るグラフは，球面上に描かれたものと考えることができる．v, e, f, c は前と同じ意味を持つとし，s をグラフのすべての頂点に関する符号変化の数の和とする．1 点の周りの符号変化の数は偶数である．それゆえ，1 頂点あたりの符号変化数の平均が 4 より小さければ，つまり $s<4v$ であれば，補題 24.1 は導かれる．コーシーによって，次のもっと強い評価が得られている．

命題 24.3 次が成り立つ．

---

*3 [訳註]頂点の結合価は，その頂点につながっている辺の数のことである．

*4 [訳註]2 種類の手続きがある．結合価 1 の頂点があれば，それにつながる辺を取り除くことと，閉路があればその辺を取り除くこと．第 2 の手続きで結合価が 1 の頂点が現れることがあるが．そのときは第 1 の手続きからやり直し，現れなければ第 2 の手続きを進めていく．

$$s \leqq 4v-8. \tag{24.2}$$

証明▶ グラフの頂点の周りを回る代わりに，すべての面の境界を回ることにしよう．符号変化の総数 s は同じである．実際，2 つの辺がある頂点の周りを回るときに隣りにあるのは，その 2 辺がある面の境界を回るときに隣りにあるとき，かつそのときに限る(図 24.4 参照)．

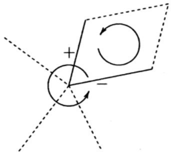


図 24.4　符号変化を 2 通りに数える

境界を回る際に，次のように約束しておこう．

a)もしある面の境界が複数の成分を持っていたら，それらすべてを回り，符号変化の数を足す．

b)もし線分がその両側である 1 つの面に隣接していたら，この線分を 2 重になっていると考え，両方の辺が同じ符号を持っているとする．そのような線分は，それぞれの側で一度ずつ，計 2 回まわることになる．

このことの説明は図 24.5 を見てほしい．この図の 4 辺形が寄与する符号変化の総数は 8 である．

f_i を，境界が i 個の稜からなる面の数とする．ここで，$i \geqq 3$ であり，稜が両側で 1 つの面に隣接するときには 2 回数える．たとえば，図 24.5 の面の境界は 13 個の稜を持つ．すると

$$f = f_3+f_4+f_5+\cdots \tag{24.3}$$

となっている．i 本の稜を持つ領域の境界を回るときにであう符号変化は高々 i 回であり，i が奇数ならば，高々 $i-1$ 回である．したがって

$$s \leqq 2f_3+4f_4+4f_5+6f_6+6f_7+\cdots \tag{24.4}$$

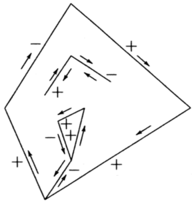


図 24.5　境界の 1 つの成分では 6 つの，もう 1 つの成分では 2 つの符号変化がある．

となる．稜はそれぞれ，2 つの面の境界に属すか，1 つの面の境界にあって 2 回数えられるかであり，それゆえ

$$(24.5)\qquad 2e = 3f_3+4f_4+5f_5+\cdots$$

となる．オイラーの公式(24.1)から $v-e+f \geqq 2$ であり，つまり $4v-8 \geqq 4e-4f$ となる．f と e に(24.3)と(24.5)を代入すると，

$$\begin{aligned} 4v-8 &\geqq (6f_3+8f_4+10f_5+\cdots)-(4f_3+4f_4+4f_5+\cdots) \\ &= 2f_3+4f_4+6f_5+8f_6+\cdots \end{aligned}$$

となるが，この右辺は(24.4)の右辺以上の値である．これで証明は終わる．◀

24.4　アーム補題と補題 24.2 の証明

次の主張はコーシーのアーム補題として知られている[*5]．

補題 24.4　$P_1 \cdots P_n$ と $P'_1 \cdots P'_n$ を 2 つの凸な球面多角形，または平面上の多角形とする．すべての $i=1,2,\cdots,n-1$ に対して $|P_iP_{i+1}|=|P'_iP'_{i+1}|$ であり，$i=1,\cdots,n-2$ に対して $\angle P_iP_{i+1}P_{i+2} \leqq \angle P'_iP'_{i+1}P'_{i+2}$ であると仮定する．そのとき $|P_1P_n| \leqq |P'_1P'_n|$ であり，等号が成り立つのは対応する角が等しいときに限る(図 24.6 参照)．

[*5] [原註]この補題は，1794 年にルジャンドルによって，別の言葉で述べられ，証明されている．ルジャンドルもまた凸多面体の剛性を予想した．

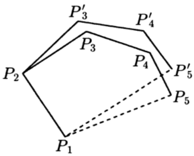


図 24.6　コーシーのアーム補題

$P_1 \cdots P_n$ をロボットのアームと考えてみよう．アームを広げれば「肩」と「指先」の間の距離は大きくなる．このことは直感的には極めて明らかである．コーシーの証明には誤りがあったが，そのことが 100 年ほども気付かれなかったことは興味深い．以下の証明は I. シェーンベルクによるものである．

アーム補題の証明▶ n に関する帰納法．$n=3$ のときは，この結果は明らかである．もし 2 つの三角形の 2 対の対応辺の長さが等しければ，第 3 の辺は大きい角に対する方が長い(図 24.7 参照)．

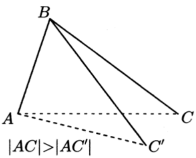


図 24.7　大きい角の対辺の方が長い

$n \geqq 4$ としよう．もし 2 つの多角形の，たとえば頂点 P_i と P'_i で，角が等しいのであれば，対角線 $P_{i-1}P_{i+1}$ と $P'_{i-1}P'_{i+1}$ によって，この 2 頂点を切り離してもよい．これらの対角線は等しいので*6，n が 1 つ小さい場合の同じ主張に帰着される．

こうして，第 1 の多角形の角はそれぞれ第 2 の多角形の対応する角よりも小さいと仮定してよい．多角形が凸であるようにしたまま，頂点 P_{n-1} に関して辺 $P_{n-1}P_n$ を回転させながら，次の 2 つのことのどちらかが起きるまで，角 $\angle P_{n-2}P_{n-1}P_n$ を大きくしていく．1 つは $\angle P_{n-2}P_{n-1}P_n$ が $\angle P'_{n-2}P'_{n-1}P'_n$ に等しくなることで，もう 1 つは 3 つの頂点 P_1, P_2, P_n が 1 直線上に並ぶこ

*6 ［訳註］もちろん，2 辺挟角の合同定理によって．

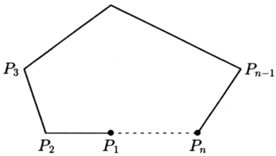


図 24.8　コーシーのアーム補題の帰納法的証明

とである(図 24.8 参照)．新しい多角形 $P_1 \cdots P_n$ が得られるが，どちらの場合でも辺 P_1P_n は大きくなる．このことは，この証明の最初の部分を三角形 $P_1P_{n-1}P_n$ に使えばわかる．

第 1 の場合には，アーム補題の条件を満たす 2 つの n 角形で，対応する角が等しい対のあるものが得られている．この場合は，この証明の第 2 の段落で既に扱われている．

第 2 の場合には，両方の多角形で第 1 の頂点を無視して，多角形 $P_2 \cdots P_n$ と $P'_2 \cdots P'_n$ に帰納法の仮定を使えば，$|P'_2P'_n| \geqq |P_2P_n|$ が結論される．それから，

$$|P'_1P'_n| \geqq |P'_2P'_n| - |P'_1P'_2| \geqq |P_2P_n| - |P_1P_2| = |P_1P_n|$$

が得られる．ここで，最初の不等式は三角不等式である．これで証明が終わる．◀

後は補題 24.2 の証明だけだが，アーム補題があれば，難しくない．

補題 24.2 の証明▶ 符号変化の数は偶数であり，2 回でも 0 回でもないことを示せばよい．最初に 2 回の符号変化があると仮定しよう．そのとき，多角形 P の頂点を順に数えて，最初の k 個の頂点 $A_1, \cdots, A_k$ がすべて正か印がついていないかであり，残りの $n-k$ 個の頂点 $A_{k+1}, \cdots, A_n$ がすべて負か印がついていないかであるようにすることができる．$B_1, \cdots, B_n$ を P_2 の対応する頂点とする．

辺 A_kA_{k+1} と A_nA_1 の上に点 C と D を選び，E と F を，辺 B_kB_{k+1} と B_nB_1 上にあり，$|A_kC| = |B_kE|$ と $|A_nD| = |B_nF|$ を満たす点とする(図 24.9 参照)．

多角形 $DA_1 \cdots A_kC$ と $FB_1 \cdots B_kE$ にアーム補題を適用すると，$|CD| > |FE|$

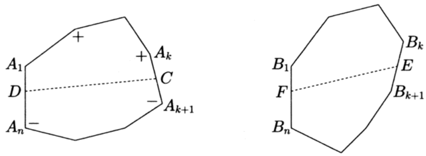


図 24.9　補題 24.2 の証明

が結論される．同じように，多角形 $CA_{k+1}\cdots A_nD$ と $EB_{k+1}\cdots B_nF$ にアーム補題を適用すると，$|CD|<|FE|$ が導かれ，矛盾となる．

最後に，符号変化がまったく起こらないなら，すべての符号が正であると仮定しよう．そのとき，アーム補題によって，$|A_1A_n|>|B_1B_n|$ となり，またも矛盾である．◀

本講の数学を開拓した人びと



オーギュスタン・ルイ・コーシー (1789-1857)
少年時，革命直後のパリから疎開していたコーシー家を訪れたラグランジュに指導を受ける．本格的な数学を学ぶ前に古典語を学ぶよう忠告され，13 歳から 2 年間語学に没頭．『解析学教程』など多くの教科書を出版．収束級数論，複素関数論，微分方程式論など業績は幅広い．

レオンハルト・オイラー (1707-1783)
朴訥な人柄で，子供は 13 人．赤ん坊を抱え，子供を足元で遊ばせながら数学をした．物理学者アラゴーは，オイラーを「解析学の化身」と称え，「人が息をするように，鷲が空を舞うように，オイラーは計算をした」と言っている．第 3 講(第 1 巻)，第 13 講(第 2 巻)も参照．





イサク・ヤコブ・シェーンベルク (1903-1990)
ルーマニア生まれの数学者で，I. シューアとランダウの弟子である．最後はウィスコンシン大学教授となった．解析的整数論，関数解析，実関数論を研究する．スプライン曲線を命名．

演習問題

24.1 あらゆる多面体には，稜の数が同じ2つの面があることを証明せよ．

24.2 あらゆる凸多面体には，三角形の面があるか，3つの面に隣接する頂点があるかのどちらかが起こる(またはその両方が起こる)ことを証明せよ．

24.3* 補題24.2の次の連続的な類似を証明せよ．2つの平面卵形線が与えられたとき，dsとds_1を，平行で同じように向きづけられた外向き法線を持つ点での弧長要素とする．そのとき，比ds_1/dsは少なくとも4つの極値を持つ．

24.4* PとP'を凸な平面n角形で$(n \geqq 4)$，その辺の長さが$\ell_1, \cdots, \ell_n$と$\ell'_1, \cdots, \ell'_n$であるとする．巡回数列

$$a_i = \left(\frac{\ell'_{i+1}}{\ell_{i+1}} - \frac{\ell'_i}{\ell_i}\right)\left(\frac{\ell'_{i-1}}{\ell_{i-1}} - \frac{\ell'_i}{\ell_i}\right)$$

を考える*7．すべてのiに対して$a_i=0$であるか，少なくとも4つのiの値に対して$a_i>0$であるかであることを証明せよ．

24.5* アーム補題の次の連続版の類似を証明せよ．「弧長でパラメータづけられた，同じ長さの滑らかで凸な弧$\gamma_1(s)$と$\gamma_2(s)$が与えられたとき，もし曲率がすべてのsに対して不等式$k_1(s) \geqq k_2(s)$を満たしているなら，γ_2で張られた弦はγ_1で張られた弦より短くない．」

---

*7 [訳註]巡回と言っているのは，添字のnの次を1と考えるというだけの意味．

第25講 柔軟な多面体

25.1 はじめに

本講は第 24 講に密接な関係があるが，独立に読むことができ，特に，どちらを先に読んでも構わない．ここでもまた，剛い(たとえば金属製の)面からなる多面体を考え，面同士は同じ長さの稜に沿って蝶番でくっつきあっているとし，面と面の間の角が変わることは妨げないとする．いくつかの明らかに特殊な場合を除いて，多面体は「完全」である，つまり，あらゆる稜がちょうど 2 つの面に属すと仮定しておく．問題はこうである．「面を変形することなく多面体を変形することができるか？」(図 25.1 参照)．前講を読んでいるなら，次の定理はよく知っている だろう．

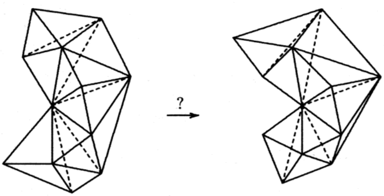


図 25.1 多面体を変形することができるか？

定理 25.1(コーシー，1813) どんな凸多面体も剛体である(曲げられない)．

これから，次の極めて意外な結果を証明することにしよう．

定理 25.2(コネリー，1978)　柔軟な(凸でない)多面体[*1]が存在する．

コーシーの定理とは異なり，コネリーの定理の証明には柔軟な多面体のたった1つの例を与えるだけでよい．そのような多面体を極めて具体的に構成するので，もし厚紙とテープなどの適当な素材があるなら，読者にもそのような多面体の模型を作ることができ，自分の指でその柔軟性を感じることができるだろう．

25.2　ブリカールの8面体

コーシーの定理の後，コネリーの例が見つかるまで150年以上もの長い時間が掛かったことを訝(いぶか)しく思うかもしれない．そういう疑問に一点の曇りもなく答えることはもちろんできないが，想像できないわけではない．剛性定理は幾何学者の間でよく知られており高く評価もされていたので，ほとんどの幾何学者は凸であろうとなかろうと，すべての多面体は剛いと信じ，それを証明する努力をしたのである(ところで，幾何学者のこうした努力がまったく無駄だったというわけではない．多面体の剛性は凸性よりもずっと弱い条件のもとで成り立つのである)．一方，コネリーは疑う勇気を持っていたのである．そして，必要なほとんどの数学的な準備が，1890年代にフランスの数学者で建築家のラウール・ブリカールによってなされていたことに気付いたのである．ブリカールが作った柔軟な多面体は，凸でなかっただけでなく，自己交差があったのである．それで，コネリーはブリカールの多面体から自己交差をなくすための道具を探した．そして彼はまたも，ブリカールの構成の中にそのような道

[*1] [訳註]flexible polyhedron の訳語である．「折り曲げ可能多面体」という言葉が使われることもある．変形が折り曲げの角度を変えることだけを許すので，この術語にも意味があるが，面や稜などの部分の線形構造を変えないという条件はあるものの，多面体という以上その条件は暗黙に満たされると考えることができるので，「変形」できるという言葉でもいいし，「折り曲げ」という言葉が別な連想を生む可能性もある．しかし，「変形」は deform という線形構造も壊すような場合に使われるので，適当でなく，別の連想を生むという点では同じなのだが，最近では簡単に「柔軟」という言葉が使われることが多い．

具を発見したのである．

ブリカールの多面体は，8 つの三角形からなり，面同士がプラトンの正 8 面体[*2]とまったく同じようにくっつきあっているという意味で，8 面体である．ブリカールの 8 面体を作るには，単純だが 2 つのことを見ておく必要がある．1 つ目は底面のないピラミッド(これは「不完全」な多面体である)が柔軟であるのは，その(三角形の)面の数が 3 より大きいとき，かつそのときに限るということである(図 25.2 参照)[*3]．このピラミッドの(失われた)底面は平坦であるとは仮定していないことに注意する(図 25.2 のどちらの 4 角ピラミッド[*4]に対しても，点 A, B, C, D が 1 つの平面に属するとは仮定されていない)．

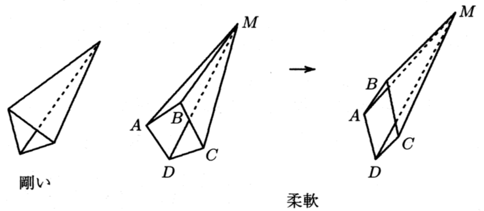


図 25.2　剛いピラミッドと柔軟なピラミッド

2 つ目は次の補題である．

補題 25.1　$ABCD$ を，3 次元空間の中の平面的でない 4 辺形(以下では空間 4 辺形と呼ぶ)で，$AB=CD$ かつ $BC=AD$ であるとする．E, F を「対角線」AC と BD の中点とする．そのとき，$EF \perp AC$ かつ $EF \perp BD$ である．

証明▶ (図 25.3 参照)線分 AF と CF を引く．(3 辺が等しいから)$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ であるので，$\angle ADB = \angle CBD$ である．それゆえ，(2 辺挟角が等しいので)$\triangle ADF \equiv \triangle CBF$ である．こうして，$AF=CF$ であって，$\triangle ACF$ は 2 等辺三角形であり，その中線 FE は高さ(垂線)でもある．だから $EF \perp AC$

*2　[訳註]5 種類の正多面体を初めて著書の中で記述したのがプラトンであったため，ヨーロッパでは正多面体のことをプラトンの立体ということが多い．
*3　このことはは第 20 講(第 2 巻)でも観察されている．
*4　[訳註]底面が 4 角形の角錐のこと．

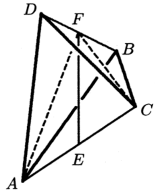


図 25.3　補題 25.1 の証明

となる．同じようにして $EF \perp BD$ も確かめることができる．◀

補題 25.1 は「対辺が等しい空間 4 辺形は対角線の中点を結ぶ直線に関して対称である」と，定式化し直すことができる．このように言い直せば，平行 4 辺形の対角線は互いに他を 2 等分する，という有名な定理の空間版と考えることができる．

さて，ブリカールの 8 面体の構成のための準備がととのった．空間 4 辺形 $ABCD$ で，対辺が等しい，たとえば $AB=CD, BC=AD$ であるものを取る．補題 25.1 から，この 4 辺形には対称軸があるので，それを ℓ と書く．互いに異なる 2 点 M と N を，さらに A, B, C, D のどれとも異なって，ℓ に関して対称であるように取る(この構成を目で見て分かりやすくするには，点 M と N を 4 辺形 $ABCD$ から十分に離して選ぶのがよい)．ブリカールの 8 面体は，8 つの三角形 $ABM, BCM, CDM, DAM, ABN, BCN, CDN, DAN$ を合わせたものである(図 25.4 参照)．いくつかの面が交差している．図 25.4 で見れば，EF は面 ABN と CDM の交線であり，面 ABN と BCM は BE で交わり，面 CDM と ADN は FD で交わっている．

定理 25.3(ブリカール，1897)　ブリカールの 8 面体は柔軟である．

証明▶ブリカールの 8 面体を 2 つの 4 角形ピラミッド $ABCDM$ と $ABCDN$ の和集合と考える．上でみた第 1 の観察から，(底のない)ピラミッ

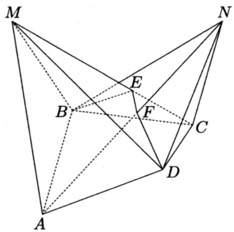


図 25.4　ブリカールの 8 面体

ド $ABCDM$ は柔軟である．その変形では，$AB=CD$ と $BC=AD$ という関係は保たれる．こうして，ピラミッドの「底面」$ABCD$ には，変形のあらゆる瞬間において，対称軸がある．変形していくピラミッドを軸の直線に関して鏡映すれば，ピラミッド $ABCDN$ の変形が得られる．この 2 つの変形を一緒にすればブリカールの 8 面体の変形が得られる．◀

25.3　ブリカールの 8 面体の幾何

本節で行う幾何的な観察の中で，後の議論で必要となるのは最後のものだけである．それでも，ブリカールの 8 面体の性質は詳細に考察したくなるほどに魅惑的である．

まず，ブリカールの 8 面体には軸対称性がある．「対角線」AC, BD, MN の中点は 1 本の直線の上にあり，8 面体の全体はこの直線に関して対称である．このことからブリカールの 8 面体の最も単純な構成法が得られる．空間に 1 本の直線を取り，この直線に関して対称な 3 対の点を(そのうちどの 4 点も 1 平面上にないように)取り，3 対の点を，A と C，B と D，M と N と書けば，するべきことは終わりである．

ブリカールの 8 面体には常に自己交差があるから，その模型を作ってみせることはできない．しかし，8 面体の 8 つの面のうちの 6 つの面を含む模型を作ることはできる(図 25.4 の 8 面体では，面 ABN と CDN を除けば自己交差がなくなることに注意する)．模型を作るなら，図 25.5 で示したような 6 つ

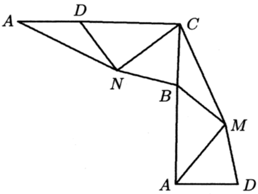


図 25.5　2 面を除いたブリカールの 8 面体の展開図

の三角形に展開したものを使うとよい．

薄くてかたい厚紙から多角形 $ADCMDABNA$ を切り取って，線分 AM, MB, BC, CN, ND に沿って折り，線分 AD を合わせるようにして(A と A, D と D を合わせ)，それをテープで貼り合わせる．出来た「帯」の全体は2回ねじれているようにする(メビウスの帯を作るときに帯をねじるが，それを 2 回行う)．展開図の作り方で重要なことは

$$(*)\qquad \begin{aligned} &AB = CD, \quad BC = AD, \quad AM = CN, \\ &AN = CM, \quad BM = DN, \quad BN = DM \end{aligned}$$

とすることで，特に，2 つの 5 角形 $ADMCB$ と $CBNAD$ は合同だが(それぞれ 3 つの三角形へ分解されるが，それらも合同で)，反対向きであるようにする．得られる図形の境界は 2 つの三角形 NAB と MCD であり，この 2 つの三角形はリンクしている(図 25.4 参照)．

この模型が(三角形の面が変わらぬままで)どんな風に柔軟(どのように動く)かを見ればきっと驚くことだろう．図 25.6 の左右の図に示されているように見えるほどに変形することができるのである．

興味深いことに，ブリカールの 8 面体は，柔軟であるために，対称的であ

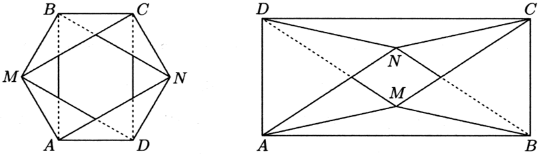


図 25.6　柔軟な模型がどのように見えるのか

る必要があるのである．もし，図 25.5 の三角形の寸法を少しだけ歪め，(*)式が成り立たないようにすると(ただし，2 本の線分 AD は等しくなければならないが)，前の模型と見た目には区別できないほどしか違わないのに，模型はもうかたくなっていて，指でその違いを感じることができるだろう(寸法の歪みをどれくらいわずかにしなければならないかは，使う素材，つまり厚紙やテープの質に依存する)．

自己交差のない不完全なブリカールの 8 面体を作るもう 1 つの方法は，1 本の稜を共有する 2 つの面，たとえば AMB と ANB を取り除くことである．図 25.7 の左に示した 6 つの三角形からなる展開図を切り取り，平面 $CMDN$ の上方で 2 本の線分 AD を互いにくっつけ，この平面の下方で 2 つの線分 BC を互いにくっつける(実際，これは対称的過ぎる図形になっている．必要なのは等式(*)を満たすことだけではあるが，対称性の度合いの高い 8 面体の方がずっと扱いやすいのである)．図 25.7 の右に示した 4 角形の稜($AMBN$)を持つ，柔軟な多面体的な曲面が得られる．長さ AB が変形の途中では変わらないことに注意する．

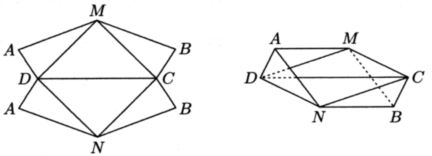


図 25.7 もう 1 つのブリカールの 8 面体の模型

自己交差してしまうので，この模型では取り除いた 2 面 AMB と ANB を付け加えることはできない．しかし，無限の大きさになってはしまうが，この多面体を完全なものにすることは可能である．つまり，面 AMB の代わりに，境界が AB であるような半平面における AMB の補集合(図 25.8 参照)に置き

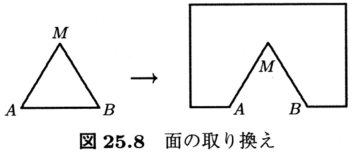


図 25.8 面の取り換え

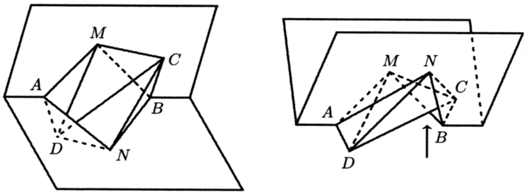


図 25.9　開いた本のようなブリカールの 8 面体

換え，また面 ANB に対しても同じことをする．

そうすると，6 つの有限の面と 2 つの無限の面を持つ完全な柔軟な多面体(開いた本に似たもの)が得られる．それを図 25.9 の左に示した．またこれを横から眺めた図は次節で重要になるが，図 25.9 の右に示した(この図における矢印の意味は次節で説明する)．

25.4　コネリーの構成

非常に退化したブリカールの 8 面体から始める．(平面)長方形 $ABCD$($AB<AD$)と，この長方形の内部に $MA=MB<MC=MD$ を満たすような点 M を取って，長方形を 4 つの三角形 AMB, BMC, CMD, DMA に分ける．この長方形と合同な長方形を取って，長方形の中心点に関して M と対称な点 N を取り，第 2 の長方形を三角形 ANB, BNC, CND, DNA に分ける．この後で，図 25.10 のように，第 1 の長方形を第 2 の長方形の上に乗せる．

8 つの三角形 $AMB, \cdots, DNA$ は，全部が 1 枚の平面の上に乗っているけれど，(退化した)ブリカールの 8 面体を作るが，自己交差多面体まで考えると，

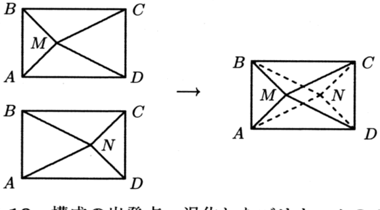


図 25.10　構成の出発点．退化したブリカールの 8 面体

それは柔軟である(図 25.6 の右図はこの変形の正しいイメージを与えていると思ってよい).

この 8 面体の面のいくつかにピラミッドを立てると，自己交差が軽減されて見えるようにできる．注意しておくが，いくつかの面をこれらの面を底面とするピラミッドに取り換えても，多面体の柔軟性を損ないはしない(図 25.11 参照)．変形の間，ピラミッドは変化しないようにしておく．

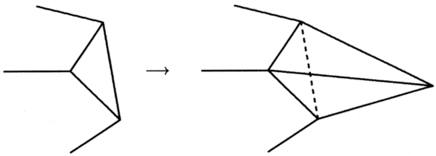


図 25.11 ピラミッドを面にくっつける

図 25.10 の平坦な 8 面体の面にピラミッドを付け加える(小さい三角形 AMB と CND は他のどんな面にも触れないので，実際には 6 つのピラミッドしか要らない)．すると，20 個の面とほんのちょっとした自己交差のある柔軟な多面体が得られる．自己交差しているのは 2 対の交わる稜のところである(この多面体の半分ずつが図 25.12 に示されており，稜の交点はこの図では E と F と書いてある).

この交点で交わる 2 面角にはほかに共通点はない．図 25.13 の左図にあるように，互いにその点で接触しているだけである．しかし，変形をすれば，この

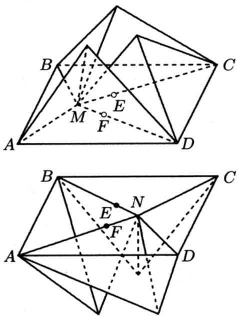


図 25.12 ほぼ完成したコネリーの多面体の半分ずつ

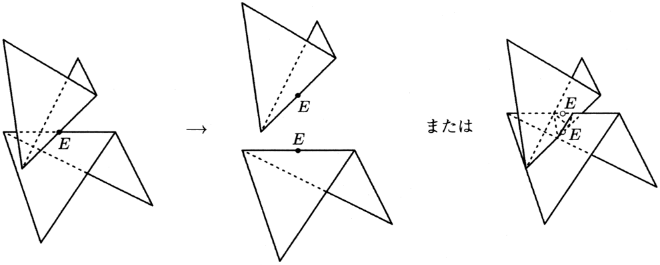


図 25.13　触れ合う 2 面角の変形

触れ合う 2 面角の対は，遠ざかったり，互いに貫通し合ったりと，図 25.13 の右図に示すような振る舞いをするだろう．

実際に，触れ合う 2 面角の 2 つの対は，1 対が遠ざかると，別の 1 対は貫通するように振る舞う(このこと自体は重要なわけではないが，計算しても実験しても，これは容易に確かめることができる)．どのみち，この多面体は自己交差をせずに変形することはできない．どうしたらいいだろう？　したいことは，2 つの触れ合う 2 面角の(少なくとも)1 つの接触点の小さな近傍を取り除くことであるが(図 25.14 の左図)，「多面体的」なやり方をしなければならない．だが，そのやり方はもう分かっていることだった．図 25.9 の右図にその方法が見えている！　矢印の先に小さな空洞があるから，この空洞を点 E とその周りに位置させるだけでよい(図 25.14 の右図も参照)．これでコネリーの構成が完成し，定理 25.2 の証明が終わる．

注意しておかなければならないが，上に示した構成は定理 25.2 の証明には非常に具合がよいのだが，模型作りや実演をするには都合のよいものではない．構成された多面体は 26 個の面からなり，そのうちの 24 個は三角形で，2

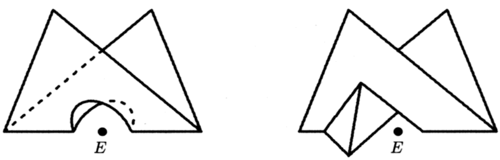


図 25.14　2 面角の最終的な修正

つは凸でない6角形である．この多面体の模型をなんとか作ったとしても，(多面体の大きさに比べて)ごくわずかの変形しかしないので，この柔軟性が多面体の数学的性質によって保証されているのか，それとも(厚紙やテープの)素材に問題があるから起こるのかが分からないだろう．しかしながら，コネリーの構成法を修正したもので，極めて満足すべき模型がある．次節ではこの修正について述べることにしよう．

25.5 もっとよい作り方

わくわくするようなコネリーのこの発見の後，多くの幾何学者が構成を改良したいと考えた．わかりやすい改良のアイデアが1つある．つまり，図25.14の挿入物を大きくして，2面角を作る2つの面を完全に食いつくすようにするのである．こうすれば，面の数は24になり，そのすべてが三角形になる．そうすると，本当にはすべてのピラミッドは必要でないことを見てとることができ，このことによって結局，すべての面が三角形であるような8つの面しかない模型ができる．

恐らく最良の構成だと思われるものを発見したのは若いドイツの数学者クラウス・シュテフェンであった．彼の多面体は14個の三角形からなり，頂点はたったの9つである．図25.15の展開図を使って模型を作ることができる．

図25.16にはこの多面体が描かれている(頂点Gが稜線$BDKH$に囲まれた空洞の中にあることに注意すれば，この図がもっとよく理解できるようになる

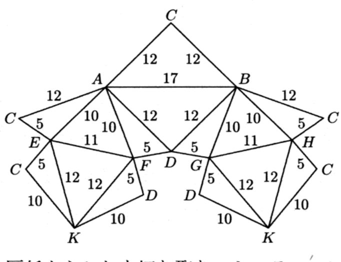


図 25.15 厚紙からこれを切り取り，シュテフェンの多面体の模型を作ること

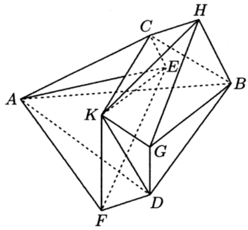


図 25.16　シュテフェンの多面体

だろう)*5.

最後に 1 つ注意しておく．図 25.15 から分かるように，シュテフェンの多面体にはまったく同じ 2 つのブリカールの 8 面体の 6 面部分で，図 25.8 に示したようなもの(図 25.15 の 2 つの翼)がある．さらに 2 つの三角形の面(図 25.15 の真ん中の部分)があって，それがともに 8 面体の一部にくっついている．この 3 つの部分にシュテフェンの多面体を分解して，図 25.17 に別々に示してある．

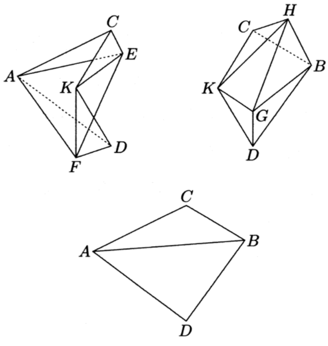


図 25.17　分解したシュテフェンの多面体

このことに注意すれば，シュテフェンの多面体が柔軟であることをそれほど驚かずに済むだろう．2 つの 8 面体の部分が変形できることは既に分かってい

*5 [原註]この変形を示すシュテフェンの多面体のアニメーションを，ウェブサイト www.mathematik.com/Steffen/ で見ることができる．

るし，この2つの部分を互いにくっつけたときに変形することもできるので，シュテフェンの多面体から2つの面(ABC と ABD)を除いたものは確かに変形可能である．この変形が距離 CD に影響を与えないことを見るのは難しくなく，そのことから多面体全体が変形可能となる(そしてこの2つの面から作られる2面角はこの変形の過程で変化しない)．

25.6 ふいご予想

さらに，「柔軟な多面体の体積は変形の過程で変化するだろうか？」という問題を考えるのも自然なことだろう．変化しないと考えられる根拠がある．図25.14の右図に示されている2面角の変形が多面体の体積に影響を与えないことを証明するのは難しくない*6．このことから，コネリーの多面体の内部の体積が，構成の最初の段階でくっつけられた6つのピラミッドの体積の和に等しく，変形の過程では変化しないことを導くことは容易である．同じように，シュテフェンの多面体(図25.16)の体積は4面体 $ABCD$ の体積に等しく，これもまた一定である．それでも，体積が変わる柔軟な多面体が構成できる可能性は残っている．しかしながら，1995年に，I. サビトフはそのような構成が不可能であることを証明した．つまり，サビトフは「ふいご予想」と呼ばれる主張を証明したのである．実際には，サビトフの定理は，多面体を作る(剛体の)面の集合が与えられたとき，これらの面から作られる多面体の体積は高々可算個の値しか取り得ない，というものである[66]．この定理から確かに，体積はどんなに少しであっても変化することが許されないのである．

最後に，多少パラドクス的な構成に触れておこう．図25.18に示したように，4面体から始めて，次のように変形する．すなわち，4面体の稜のそれぞれを2本の線分に分割し，各面を10個の三角形に分割して，稜上の新しい頂点を内側に押し込む．これは元の4面体の等長的な変形である．

稜の中央部分が内側に押されるので，体積が減ると期待されるだろう．しかしながら，面の中央部が外側に動き，実際には全体積が3分の1以上増える

*6 [原註]自己交差のある多面体の「内部」の体積の正しい定義(詳細は読者に任せる)を使うと，どんなブリカールの8面体の体積も0であることが証明できる．

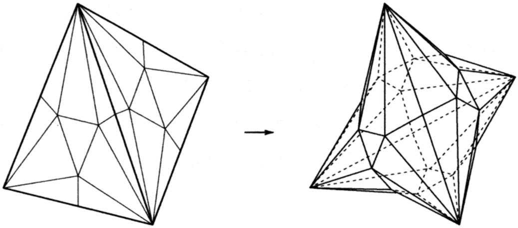
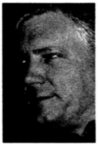


図 25.18　4面体の体積が増える等長的な変形

のである！　同じように，体積が増える等長的な変形はすべてのプラトンの立体(正多面体)に対しても起こり得るし([7], [12])，さらにすべての多面体的曲面に対しても起こり得る([58]).

この構成がふいご予想に矛盾するように見えるかもしれない．しかし矛盾するわけではない．図25.18に描かれた4面体の変形は連続な等長変形ではないのである(元の4面体の面を分割する小さい三角形の寸法がこの過程で変化する).

本講の数学を開拓した人びと



ロバート・コネリー (1942年生まれ)
ミシガン大学から，論文「余次元が3より大きい閉埋め込みをほどく」によりPh.D.取得．コーネル大学数学科教授．離散幾何，剛性理論，計算機幾何，パッキング，被覆などを研究する．I. サビトフ，A. ウォルツとともに，鍛冶屋のふいごの仮説を証明した．



クラウス・シュテフェン (1945年生まれ)
ドイツの数学者．現在，デュッセルドルフ大学数学研究所教授．ジャバラ運動を持つ曲面の例(シュテフェンの多面体)を与える．

演習問題

25.1 $ABCD$ を平面の自己交差のない4辺形とする．辺の長さは変えないが角は変わるという変形を許すとする．

(a) 4辺形 $ABCD$ は常に三角形に変形することができることを証明せよ．

(b) 4辺形 $ABCD$ は常に台形に変形することができることを証明せよ．

(c) 4辺形 $ABCD$ は常に，AB が平行辺の1つになるように，台形に変形することができるか？

25.2 $ABCD$ を台形とする．変形の際に台形であることは変えないようにして，演習問題25.1でのような変形がしたい．それが可能であるのは，平行4辺形であるとき，かつそのときに限ることを証明せよ．

25.3 $A_1A_2\cdots A_n$ を平面 n 角形とする．この n 角形の**許容可能な変形**を，長さ $|A_1A_2|, \cdots, |A_{n-1}A_n|, |A_nA_1|$ に影響を与えないような，点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ の連続的な運動からなるものとする．

(a) $n=4$ とする．4つの数 $|A_1A_2|, |A_2A_3|, |A_3A_4|, |A_4A_1|$ を使って，4辺形 $A_1A_2A_3A_4$ とその鏡像 $A_1'A_2'A_3'A_4'$ を結ぶ許容可能な変形が存在するための必要十分条件を求めよ（ここで鏡像とは，ある直線 ℓ が存在して，すべての i に対して，点 A_i と A_i' が ℓ に関して対称であることを意味する）．

[ヒント]下のコメントを参照．

(b) $n=5$ と数 $|A_1A_2|, \cdots, |A_4A_5|, |A_5A_1|$ に対して同じことをせよ．

[ヒント]下のコメントを参照．

コメント．どんな n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ に対しても次の2つの主張が同値であるという，カポヴィッチとミルソン[43]による一般的な結果がある．

(1) 等式

$$|A_1'A_2'| = |A_1A_2|, \quad \cdots, \quad |A_{n-1}'A_n'| = |A_{n-1}A_n|, \quad |A_n'A_1'| = |A_nA_1|$$

を満たすどんな n 角形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ に対しても，n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ を $A_1'A_2'\cdots A_n'$ に移す許容可能な変形がある．

(2) $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を，数 $|A_1A_2|, \cdots, |A_{n-1}A_n|, |A_nA_1|$ を非増加の順序 $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$ に並べ直した数列とする．そのとき

$$a_2 + a_3 \leqq a_1 + a_4 + \cdots + a_n$$

となる．

25.4 $ABCD$ をある平面にある自己交差のない4辺形とし，M をこの平面にない点とする．ピラミッド $MABCD$ は，底辺 $ABCD$ を取り除くと柔軟になる(25.2節参照)．この変形の過程では，点 A, B, C, D が共平面ではあり続けることができないことを証明せよ．

25.5 (自己交差があってもよい)多面体は，各面の両側に黒と白を塗って，各稜で色が合っているようにできるときに**両側**であると言い，そうできないときに**単側**であると言う．

(a) 自己交差のない多面体は両側であることを証明せよ．

(b) 図25.19に示した(プラトンの)正8面体を取り，三角形の面 AMB, BNC, CMD, DNA を取り除き，4角形の面 $ABCD$, $AMCN$, $BMDN$ を付け加える．この構成によって，完全な(つまり，あらゆる稜がちょうど2つの面に属している)単側多面体ができることを証明せよ．

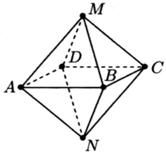


図 25.19　8面体から作られた単側多面体

(c) ブリカールの8面体が両側であることを証明せよ．また，対称軸に関する鏡映によって白が黒に，黒が白に移ることを証明せよ．

25.6 P を完全な両側多面体とする．演習問題25.5のように面を黒と白で塗り，P のどの面とも垂直ではなく，P と交わらない平面 Π を選ぶ．面 F に対し，F とその Π の上への直交射影との間のプリズム(図25.20参照)の体積

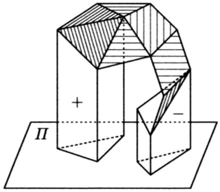


図 25.20　符号付き体積

に，プリズムの上側の面が白いときに -1 を掛けたものを，基礎体積と定義する．P の**符号付き体積**をすべての面の基礎体積の和と定義する．

(a) 符号付き体積が Π に依らないことを証明せよ．

(b) P に自己交差がなく，外部が白に塗られていれば，符号付き体積は通常の体積であることを証明せよ．

(c) ブリカールの 8 面体の(符号付き)体積が 0 であることを証明せよ．

[ヒント]演習問題 25.5(c)の対称性を使うこと．

特に，このことから，ふいご予想がブリカールの 8 面体に対して成り立っていることが示される．

(d) シュテフェンの多面体(25.5 節)の符号付き体積が 4 面体 $ABCD$ の体積に等しいことを証明せよ．シュテフェンの多面体に対するふいご予想を導け．

25.7 (a)* 凸多面体の滑らかな族 P_t を考える．ここで，t はパラメータである．$l_j(t)$ でその稜の長さを，$\varphi_j(t)$ で対応する 2 面角を表す．

$$\sum_j l_j(t)\frac{d\varphi_j(t)}{dt} = 0$$

を証明せよ．

(b) 多面体の**全平均曲率**を $\sum_j l_j\varphi_j$ と定義する．柔軟な多面体の全平均曲率が，変形の過程で同じままであることを証明せよ．

第26講 アレクサンダーの角つき球面

「角(つの)つき球面」の2つの性質は本書にふさわしい題材である．第1にそれは重要な難題の解を与えてくれるからであり，第2に本当に美しい図形だからである．

26.1 C. ジョルダンと A. シェーンフリースの定理

平面上の**曲線**は動く点の軌跡と考えられる．もし運動の始点と終点が一致するなら**閉曲線**と呼ばれ，動点が異なる2時点では異なる位置にあるなら**単純曲線**または**自己交差のない曲線**と呼ばれる．ジョルダンの定理は，単純閉曲線は平面を「内部」と「外部」の2つの領域に分けることを主張するものである．つまり，一方の領域にあるどんな2点も曲線 C と交わらない折れ線によって結ぶことができ，一方の領域の点ともう一方の領域の点を結ぶ折れ線は曲線と交わるのである(図 26.1)．

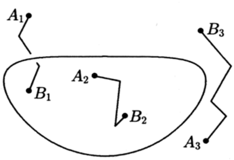


図 26.1 閉曲線は平面を2つの部分に分ける

これは解析学，たとえば積分論で重要な定理である．積分論では与えられた単純閉曲線によって囲まれた領域を考える必要がある．しかし，この定理は，解析学というよりむしろ**トポロジー**に属する「平面が単純閉曲線によって分割される部分というのはどのように見えるか？」という問題に答えてはいない．

この「のように見える」というあいまいな表現は，数学では通常もっと厳密

な「同相」という言葉に取り換えられる．2 つの領域が同相であるとは，一方から他方への全単射写像が存在して，この写像も逆写像もともに連続であるときに言う．たとえば，円周の内部と正方形の内部とは同相であるが(違っているように見えると言うこともできるけれど)，そのどちらも円環(2 つの同心円の間の領域)とは同相ではない．

1908 年に A. シェーンフリースは，平面の単純閉曲線をどのように取ろうとも，その内部と外部は，標準的な円周の内部と外部，つまり，開円盤と丸い穴のあいた平面(図 26.2)に同相であることを証明した．同じように，互いに交わらず，一方が他方の内部に含まれるような 2 本の単純閉曲線の間にある領域は，円環と同相であることが証明できる．

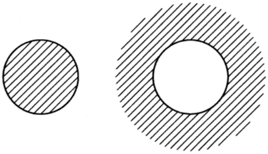


図 26.2　内部と外部

26.2　空間への一般化

空間幾何でもジョルダンの定理とシェーンフリースの定理に似た定理があるはずだと期待できる．だから，必要なことは正しい主張を見つけることだけだと思えるだろう．閉曲線は恐らく，閉曲面に置き換えるべきなのだろう．しかしここで，最初の困難に遭遇する．閉曲線はすべて同じように見える(つまり，すべて同相である)が，閉曲面には本質的に異なるものがあるのだ．球面あり，トーラスあり，ハンドル付きの球面あり，である(図 26.3)．乱暴な仕方でこの困難を解決してしまうことにする．つまり，こうした多様性はあっさり無視してしまい，標準的な丸い球面から，自己交差のない連続的な変形によって得られる曲面だけを考えることにするのである．そのような曲面に対してなら，ジョルダンの定理とシェーンフリースの定理に類似の結果が得られる希望がある．

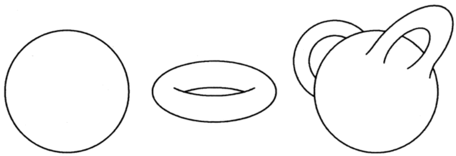


図 26.3　異なる種類の曲面

ジョルダンの定理については，空間での類似が成り立つことが分かる．つまり，このような曲面は空間を内部と外部の 2 つの部分に分割し，平面におけるジョルダンの定理の主張を何も変えず，そのまま成り立っている．同じことがハンドル付きの球面に対しても成り立ち，任意の次元に自然な一般化がある．

しかし，シェーンフリースの定理についてはどうだろうか？　空間でそれに対応するのは，内部領域と外部領域が標準的な球面で分割される 2 つの領域，つまり，開球と，閉球の補集合に同相であるという主張になる．この予想はもっともらしく見えるが，実は間違っている．このことを 1924 年に証明したのは，当時は若手だったアメリカ人トポロジスト*[1]のジョン・アレクサンダーである．このアレクサンダーの仕事にはとても説得力があった．空間を標準的でない領域に分割する，変形された球面を空間内に具体的に構成してみせたからである．その構成を以下で述べることにする．

26.3　それはとても美しい

その構成は美しいだけではなく非常に単純でもある．図 26.4 に示したもの

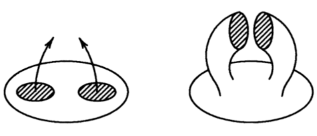


図 26.4　指を引き出す

*[1] [訳註] トポロジーの研究者をトポロジストという．幾何学者や解析学者などと同じような訳語にしようとすれば位相学者となるだろうが，現状では誤解を招きかねない．

がこの構成の主要部分である．大きな平面円盤の内部に2つの交わらない小さな円盤を取り，そこから2本の「指」を引っぱり出して，両方の端の円盤を近づけるのである．このとき互いに接しないようにすること．

その両端自身も平面円盤になっている*2．2つの平行な円盤から同時に指を引き出して，4本の指を図26.5に示したように「ロック」させる．

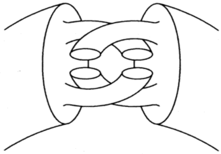


図 26.5　ロック

さて，構成全体を述べることができるようになった．丸い球面を取る．そのあと，この球面上の2つの円盤から2本の指を引き出し，互いにほとんど接するくらいまで近づけ，図26.4のようにする(図26.6参照)．

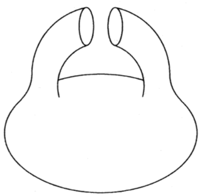


図 26.6　第1段階．2つの指が球面から引き出される

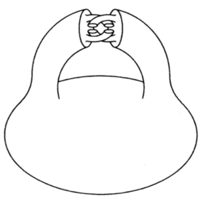


図 26.7　第2段階．ロックが指の間に挿入される

*2 [訳註]指の引っぱり出しの際，小円盤の形は変形しないようにし，さらに平行にして，直円柱の両底面であるような位置に置くようにしている．

2本の指の端は，互いに近い位置にある2つの平行な平面円盤である．この2つの円盤から4本の指を，2つの円盤から2本ずつ引っぱり出して，図26.5のようにロックさせる(図26.7参照)．

今度は，さらに小さく，より近づいた円盤が2対できている．それぞれの対の円盤の間に，図26.5のものを縮小して挿入し，ということを無限回繰り返す．この繰り返しの後に得られる図形は「アレクサンダーの角つき球面」と呼ばれている．登場する指がどんどん小さくなるので，この球面を満足のいくほど申し分なく描くのはとても難しい．それでも図26.7は，視覚的にはまずまず近いものになっている．

26.4　それは真っ当な球面である

一見するだけでは，このことは疑わしいように思えるだろう．

アレクサンダーの球面は，重量挙げのバーベルを2つに折って，その持ち手の切れ目にさまざまなサイズのワイヤが複雑に絡み合ったものが押し込まれているようにも見える．本当に，ハンドルのさまざまなパーツの両端はくっついていないのだろうか？　両端が互いにいくらでも近づいていくし，構成の各段階で曲面のある部分をともに引っぱり出しているから，極限では互いに溶けあってしまうように見える．

しかし，そうではない．両端がくっつくという危険性は単にそう見えるというだけのものである．この構成を，球面のあらゆる異なる2点の最終的な位置の間の距離が，元の距離の，たとえば1%よりも小さくないように行うことができる(「たとえば」と言ったのは，指の長さや切れ目の幅などの，すべてのサイズは図26.4と26.5では定まっているわけではなく，好きなように選ぶことができるからである)．

構成を一歩ずつ確かめてみよう．最初の指の引き出しには丸い球面の2つの円盤が関係する．球面の残りの部分は構成している全期間にわたって触れられないままである．第2段階では，その2つの円盤の内部にある，4つのさらに小さい円盤が関係しているだけである(図26.8参照)．この4つの円盤の外側の球面の部分は，第1段階より後のすべての段階で触れられないままで

ある．同じように，第 3 段階で関係するのは 8 つの円盤で(また図 26.8 参照)，第 4 段階で関係するのは 16 の円盤で(図 26.8 には示されていない)，などと行われる．これらの円盤をサイズ $1, 2, 3, 4, \cdots$ の円盤と呼ぶことにする．すると，サイズ n の円盤は 2^n 個あり，サイズ n の円盤はそれぞれサイズ $n+1$ の円盤をちょうど 2 つ含んでいる．サイズ n のどの円盤にも含まれない球面の点は，第 n 段階から始まるすべての構成段階では触れられないままである．

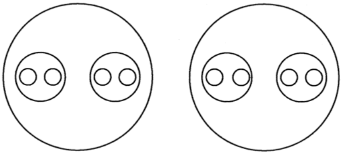


図 26.8　構成に関係する円盤

今度は点の間の距離の挙動を調べてみよう．球面上に異なる 2 点 A と B を取る．A と B のどちらもサイズ 1 の 2 つの円盤に含まれていないなら，点 A, B の位置は変わらないままなので，その間の距離も変わらない．一方の点がサイズ 1 の円盤の 1 つに属し，もう一方がそうでないなら，その間の距離の変化はたいして大きくなく，距離が小さくなるにしても，元の 3 分の 1 以下にはならないと仮定することができる．A と B がサイズ 1 の**異なる**円盤に属すなら，第 1 段階の後で点 A, B はかなり接近するが，たとえば元の 10 分の 1 以上は離れているようにできる．さらに，2 点がサイズ 2 の円盤に属したら，次の段階ではさらに近づくことになるが，互いの距離がたとえば 10 分の 1 よりも近づかないようにはできる(図 26.9 参照)．しかしたとえ，この 2 点がサイズ 2 以上の円盤に属したとしても，構成のそれ以降のすべての段階を経た後でも，2 点はたいして近づくことはない(またも図 26.9 参照)．このことは，「構成の n 番目の段階ではサイズ $n-1$ の同じ円盤に属する点だけを引っぱり出す」という，構成の基本的な性質があるからである．

さて一般的な距離の原理を定式化しておこう．「A と B が同じ円盤に属すときの円盤のサイズの最大値を n とする．そのとき，第 1 段階から第 n 段階までは，2 点間の距離は変わらない．もしそのどちらもサイズ $n+1$ の円盤に属さないならば，その間の距離は，構成のそれ以降のすべての段階で変わら

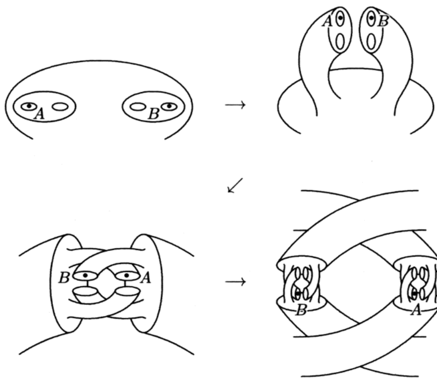


図 26.9　点 A と B は互いに近づいていかない

ない．もし，点 A, B の一方だけがサイズ $n+1$ の円盤に属すなら，それ以降のすべての段階の後で，2 点間の距離は 3 分の 1 よりも小さくならない．もし両方の点がサイズ $n+1$ の円盤に属すなら，第 $n+1$ 段階での距離は小さくなるが，10 分の 1 よりは離れている．もし両方の点がサイズ $n+2$ の円盤に属さないのなら，2 点間の距離は第 $n+1$ 段階より後では変わらない．もし 2 点のうちの 1 つだけがサイズ $n+2$ の円盤に属すなら，2 点間の距離は第 $n+2$ 段階では 3 分の 1 になるかもしれないが，この後ではたいして減らないことになる．どの場合でも，点 A と B の間の距離は 100 分の 1 より小さくなることはない．」

したがって上に述べたように，アレクサンダーの角つき球面は球面と「同相」であり，まさしく球面なのである．

26.5　角つき球面の外部

角つき球面の内部は，標準的な球体(境界はない)と同相である．このことの証明は難しくないが，ここでは必要がない．もっと重要なことは，角つき球面の**外部**は標準的な球体の外部と同じでない(同相でない)ということである．このことの証明は簡単だが，興味深いものである．というのも，これがトポロ

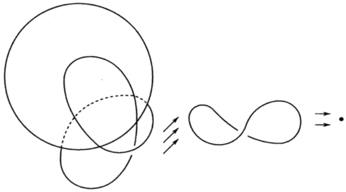


図 26.10　標準的な球面の外部は単連結である

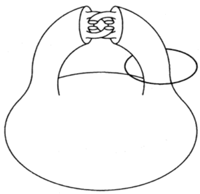


図 26.11　アレクサンダーの角つき球面の外部は単連結ではない

ジーにおける典型的な証明になっているからである．標準的な球面の外部は(内部もそうなのだが)トポロジストが**単連結**と呼ぶ性質を持つ．つまり，あらゆる閉曲線は連続的に1点にまで変形することができるのである．その厳密な証明には少し専門的なところがあるが，そのこと自体は明らかなことに見える(図26.10参照)．

2つの領域が同相ならば同時に単連結になる．つまり，一方が単連結ならばもう一方も単連結になる．しかし，角つき球面の外部は単連結では**ないのである**．バーベルのハンドルを取り囲む曲線(図26.11)は連続的にハンドルから外して取り出すことはできない．曲線を外して取り出すためには，あらゆるサイズの近接した平行な円盤の間の隙間を通さなければならない．それゆえ，曲線を変形していく際に，角つき球面にいくらでも近くに行くことになり，そうすると曲線が角つき球面に触れる瞬間があることになるが，これは禁止されている．曲線の変形は球面の外部で行われなければならないからである．

こうして，角つき球面の外部は単連結ではなく，それゆえ，標準的な球面の外部とは同相でない．このことは，予想されたシェーンフリースの定理の空間版が成り立たないことを意味している．

26.6　ほかには？

ここまでくると，簡単に賢く見せることもできる．角を球面の外部に引っぱり出したのだが，内部に引っぱってもよかった．そうすると，外部ではなく内部の方が，標準的な丸い球面の内部と同相でないような球面が得られる．または，角を2対，一方を球面の内部に，他方を外部に引っぱることもできる．そうすると，球面の外部も内部も，標準的な球面のものとは異なる(単連結でない)ことになる．または，2対でなくて，たとえば，22対(さもなければ222対)の角を，いくつかは球面の内部に引っぱって，いくつかは外部に引っぱることができ，さらにそれらをたがいにどんな風に絡ませることもできる．可能性がこんなにも多様だからといって，もう驚くほどのこともないだろう．

26.7　結論：さらなる発展

アレクサンダーの発見から数十年の歳月が過ぎた．今でもまだ，トポロジストはシェーンフリースの定理の空間版があるだろうと期待している．あまりにも複雑ないくつかの形を除外できればいいだけになってはいる．**多面体的**球面，つまり有限個の平面多角形からできているような球面ではどうだろうか？この場合でさえ，問題は非常に難しいものであることが分かっている．それでも1960年にモートン・ブラウンがシェーンフリースの定理の多面体版を証明した(このブラウンの定理は実際にそれより広いクラスの曲面に対して成り立つ．演習問題26.1参照)．

ブラウンの定理はより高い次元でも成り立つ．しかしながら，高次元では，多面体的球面でさえ，予想外なことが起きて驚かされる．たとえば，R. カービーとL. ジーベンマンは1970年代に，4次元空間において，一方が他方の内部に含まれるような2つの多面体球面が，2つの同心球面が境界となるような標準的な領域とは異なる領域の境界となることがあることを示した．

しかし，こういうことはすべて，ここで扱うことのできる範囲を越えてしまっている．

本講の数学を開拓した人びと



ジェームス・アレクサンダー (1888-1971)
曽曽祖父アーチボルド・アレクサンダーは，プリンストン神学校の初代教授で校長．ポアンカレのアイデアの厳密化を行う．ジョルダンの曲線定理の拡張を目指し，アレクサンダー双対性，球面上のアレクサンダーの補題を示す．コルモゴロフと独立にコホモロジー論を発見．

カミーユ・ジョルダン (1838-1922)
エコール・ポリテクニクの後，鉱山学校卒業．数論，関数論，幾何学，トポロジーを研究した．群論とガロア理論の最初の教科書を執筆．ジョルダン=ヘルダーの定理，ジョルダンの標準形，ジョルダン行列，ジョルダン曲線などに名を残す．



演習問題

曲面 S が点 $P \in S$ で**局所的に平坦**であるとは，P を中心とする小さな球体 B から別の球体 B' の上への同相写像であって，共通部分 $B \cap S$ を，ある平面と B' との共通部分に写すものが存在するときに言う．ブラウンの定理(26.7 節参照)は，空間における曲面が球面と同相であり，そのすべての点で局所的に平坦ならば，この曲面は空間を 2 つの標準的な部分に分けるというものである．

26.1　どんな点でアレクサンダーの球面は局所的に平坦でないか(変形の前と後の両方で，球面上のこの集合を記述せよ)？　局所的に平坦でない点の集まりは可算集合か，それとも非可算集合か？

これ以降の演習問題は，アレクサンダーの球面とは直接に関係してはいないが，その構成には似通った雰囲気がある．古典的なカントール集合から始

めよう．区間 $[0,1]$ を取る．中央の3分の1である開区間 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ を取り除く．それから，残った2つの区間のそれぞれから中央の3分の1，つまり開区間 $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ と $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ を取り除く．それから，残った4つの区間のそれぞれから中央の3分の1を取り除く，ということを続ける．この無限の手続きの結果，得られる集合をカントール集合と呼ぶ．それを C と書き，その補集合を D と書く．

26.2 (a) $\frac{1}{4},\frac{10}{13},\frac{19}{27}\in C$ であることを証明せよ．

(b) もっと一般に，$x=[0.d_1d_2d_3\cdots]_3$ を x の3進数表示とする．x が C に属す条件を数字 d_i を使って表せ．

次に，カントール関数 γ: $[0,1]\to[0,1]$ を定義しよう．$x\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ に対して，$\gamma(x)=\frac{1}{2}$ とおく．第2段階で取り除かれる2つの区間 $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ と $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ の上では関数の値は一定で，それぞれ $\frac{1}{4}$ と $\frac{3}{4}$ とおく．第3段階で取り除かれる4つの区間の上では関数の値は一定で，それぞれ $\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{7}{8}$ とおく．これを続けていく．この手続きによって関数 γ は D 上で定義される．

26.3 (a) あらゆる $x\in C$ に対して一意的に $y\in[0,1]$ が存在して，あらゆる $z\in[0,x)\cap D$ に対して $\gamma(z)\leqq y$ であり，あらゆる $z\in(x,1]\cap D$ に対して $\gamma(z)\geqq y$ となることを証明せよ．

$\gamma(x)=y$ とおく．γ が連続な単調関数であることは容易に分かる．

(b) $\gamma\left(\frac{1}{4}\right),\gamma\left(\frac{5}{13}\right)$ を計算せよ．

(c) より一般に，$x=[0.d_1d_2d_2\cdots]_3$ として，$\gamma(x)$ の2進法での表示を求めよ．

(d) x が有理数なら，$\gamma(x)$ が有理数となることを証明せよ．

今度は，正方形 $[0,1]^2=\{(x,y)|0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq 1\}$ の中にペアノ曲線を定義しよう．F: $[0,1]\to[0,1]^2$ を，$F(0)=(0,0)$, $F(1)=(0,1)$ を満たす連続曲線と

する．$F(t)$ の座標を $(f(t), g(t))$ と書く．曲線 $\widetilde{F}$: $[0,1] \to [0,1]^2$ を

$$\widetilde{F}(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}g(4t), \dfrac{1}{2}f(4t)\right) & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{4}\text{のとき}\right), \\ \left(\dfrac{1}{2}(f(4t-1)+1), \dfrac{1}{2}g(4t-1)\right) & \left(\dfrac{1}{4} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}\text{のとき}\right), \\ \left(\dfrac{1}{2}(f(3-4t)+1), 1-\dfrac{1}{2}g(3-4t)\right) & \left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq \dfrac{3}{4}\text{のとき}\right), \\ \left(\dfrac{1}{2}g(4-4t), 1-\dfrac{1}{2}f(4-4t)\right) & \left(\dfrac{3}{4} \leqq t \leqq 1\text{ のとき}\right) \end{cases}$$

という式で定義する．要するに，曲線 F を 1: 2 の割合で縮小し，縮小した元の曲線を 4 つコピーして，適当に平行移動や回転や裏返しを行って繋ぎ，新しい曲線を作るのである．後は図 26.12 にあるように，上のような任意の曲線 F から始めて，上に述べた変換を無限回行い，極限の曲線を P: $[0,1] \to [0,1]^2$ と書く．これが**ペアノ曲線**である．

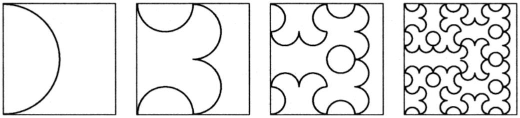


図 26.12　ペアノ曲線

26.4　(a) この極限が存在して連続であることを証明せよ．

(b) P が元の曲線 F によらないことを示せ(F が連続で，$(0,0)$ と $(0,1)$ を結んでいればよい)．

(c) あらゆる $(x,y) \in [0,1]^2$ に対して，$t \in [0,1]$ が存在して(一意的でないかもしれないが)，$P(t)=(x,y)$ となる(言い換えれば，ペアノ曲線は正方形全体を満たす)ことを証明せよ．

(d) $P\left(\dfrac{1}{3}\right)$, $P\left(\dfrac{1}{5}\right)$ を求めよ．

(e) $t=[0.d_1d_2d_3\cdots]_2$ に対して，$P(t)$ の座標を(2 進法で)求めよ．

(f) t が有理数なら，$P(t)$ の座標が有理数であることを証明せよ．

第27講 円錐を裏返す

27.1 問題

平面から原点を除いた領域で，2つの関数 $f_0(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ と $f_1(x,y)=-\sqrt{x^2+y^2}$ を考える．その勾配ベクトルは大きさが一定の半径ベクトル場をなし，前者が原点から離れる向きで，後者が原点に向かう向きである*1(図 27.1 参照)．1つ目のベクトル場から2つ目のベクトル場へ，どんな中間の場のベクトルも0になることなく，容易に変形することができる．それには，単にそれぞれのベクトルを 180° 回転すればよい．

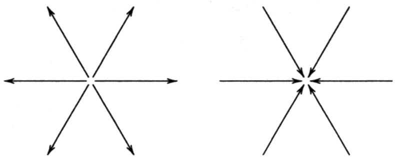


図 27.1 原点から出るのと入るのとの2つの半径ベクトル場

しかし，そのような変形を，非退化な*2**勾配**ベクトル場のクラスの中で行うことができるだろうか？ 言い換えれば，**関数 $f_0(x, y)$ と $f_1(x, y)$ を，穴の開いた平面での臨界点を持たない滑らかな関数の1パラメータ族 $f_t(x, y)$ に入れ込み，しかも $f_t(x, y)$ がパラメータ t に関して連続的に依存するようにできるだろうか？** これがこの講義で議論する問題である．

この問題は，見かけほど単純なものではない．あるベクトル場の流線を見

---

*1 [訳註] f_0 の勾配ベクトル場は $\mathrm{grad}\, f_0=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ で与えられ，原点以外で定義され，半径方向を向き，長さは1という一定の値を持っている．

*2 [訳註] この場合，非退化というのはどの点でもゼロベクトルにならないということである．

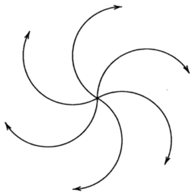


図 27.2　これは勾配ベクトル場ではない

るだけで，それがある関数の勾配ベクトル場になっているかどうかを見定めることは易しいことではない．たとえば，図 27.2 の場は勾配ベクトル場ではない．これは原点を中心とする円周に沿って 0 でない仕事をする．「仕事」とは，物理で学ぶことだが，曲線 γ に沿って力 F によってなされる仕事は線積分 $\int_\gamma F \cdot ds$ によって表されるものである．ポテンシャル関数の勾配場によって与えられる力は保存力で，閉曲線に沿ってなされる仕事はつねに 0 になる．

問題をもっと幾何的に定式化することができる．S_t を関数 $f_t(x, y)$ のグラフとする．曲面 S_0 と S_1 は円錐である(図 27.3 参照)．一方の円錐をもう一方の円錐に変形したい．ただし，中間の曲面 S_t から穴開き平面の上への射影が 1 対 1 である，つまり S_t が穴開き平面で定義される関数のグラフになっているようにし，さらに，曲面 S_t のどんな点でも水平な接平面を持たないようにしたいのである．実際，接平面が水平であるのは，まさに関数が臨界点を持ち，その勾配が消えているときに起こるからである．

次の節で，そのような円錐の裏返しを行うことにする．

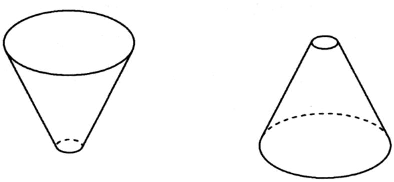


図 27.3　左の円錐を，いつでもどこでも水平になることなく裏返して，右の円錐にすることができるか？

27.2 解答

最初に注意しておくが，穴開き平面より，円環，たとえば $1<\sqrt{x^2+y^2}<3$ を満たす領域を扱う方が楽なので，そうすることにする．極座標を使い

$$(\alpha, r) \mapsto \left(\alpha, \frac{r-1}{3-r}\right)$$

で与えられる滑らかな写像によって，円環と穴開き球面が同一視されるので，一方の領域での解答から他方の領域での解答が得られる．

その上で，具体的な変形を与えることにする．曲面 S_t を，円柱座標 (α, r, z) で，方程式

$$z_t(\alpha, r) = g_t(\alpha)+0.25(r-2)\ h_t(\alpha)$$

によって与える．ここで $0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$，$1<r<3$ であり，t は 0 から 1 まで変化する．関数 g_t と h_t は

$$g_t = 4t\sin\alpha,\quad h_t = (1-2t)+4t\cos\alpha \qquad (t \in [0, 0.25]),$$

$$g_t = 2(1-2t)\sin\alpha+(4t-1)\sin 2\alpha,\quad h_t = \cos\alpha+(1-2t) \qquad (t \in [0.25, 0.5]),$$

$$g_t = -2(2t-1)\sin\alpha+(3-4t)\sin 2\alpha,\quad h_t = \cos\alpha-(2t-1) \qquad (t \in [0.5, 0.75]),$$

$$g_t = -4(1-t)\sin\alpha,\quad h_t = -(2t-1)+4(1-t)\cos\alpha \qquad (t \in [0.75, 1])$$

で与えられるものである．

ここで止めてもよいのかもしれない．式は具体的に書かれているのだから，曲面 S_t がどこでも水平な接平面を持たない(つまり，関数 z_t が臨界点を持たない)ことを喜んで確かめてくれるような，熱心な読者もいることだろう．しかしもちろん，説明をせずに読者に任せてしまうわけにはいかないだろう．

これらの式がどのようにして導かれるのかを説明しよう．最初と最後の関数が r に関して 1 次式なので，関数 z_t を

$$z_t(\alpha, r) = g_t(\alpha)+\varepsilon(r-2)\ h_t(\alpha)$$

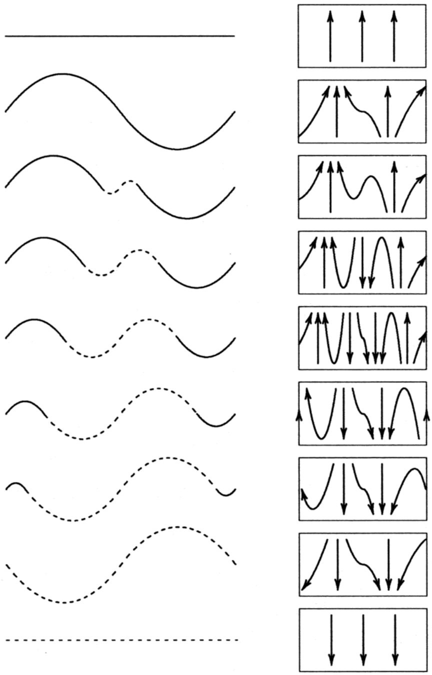


図 27.4　変形．式の背後にある幾何

という形で探すのは自然である．ここで，g と h は周期関数で，ε は十分小さいパラメータである(上の式での実際の値は 0.25 である)．最初の円錐は $g_0(\alpha)=0$ と $h_0(\alpha)=$定数>0 に対応し，最後の円錐は $g_1(\alpha)=0$ と $h_1(\alpha)=$定数<0 に対応する．

曲面 S_t を空間においた閉じたロープのはしごと考えるのが，役に立つかもしれない．中心の軸が閉曲線

$$z = g_t(\alpha),\quad 0 \leqq \alpha \leqq 2\pi,\quad r = 2$$

であり，横木が傾き $\varepsilon h_t(\alpha)$ の半径方向の線分

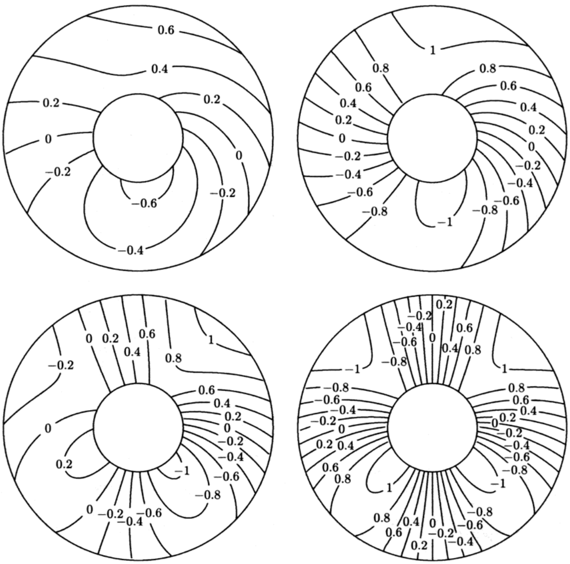


図 27.5　$t=\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{8}, \dfrac{1}{2}$ に対する関数 z_t のレベル曲線

$$z = g_t(\alpha) + \varepsilon(r-2)\ h_t(\alpha),\quad \alpha = \text{定数},\quad 1 < r < 3$$

であるようなはしごと考えるのである．そうすると，最初($t=0$)は，軸が水平の円周であり，すべての横木の傾きは正である．最後($t=1$)では，軸はまた水平の円周であって，横木の傾きはすべて負である．

変形の際に避けたいのは，軸と横木が同時に水平になる瞬間である．したがって，関数

$$\frac{dg_t(\alpha)}{d\alpha} + \varepsilon(r-2)\frac{dh_t(\alpha)}{d\alpha} \quad \text{と} \quad h_t(\alpha)$$

は共通の零点を持ってはいけない．もしもある t に対して

$$\frac{dg_t(\alpha)}{d\alpha} \quad \text{と} \quad h_t(\alpha)$$

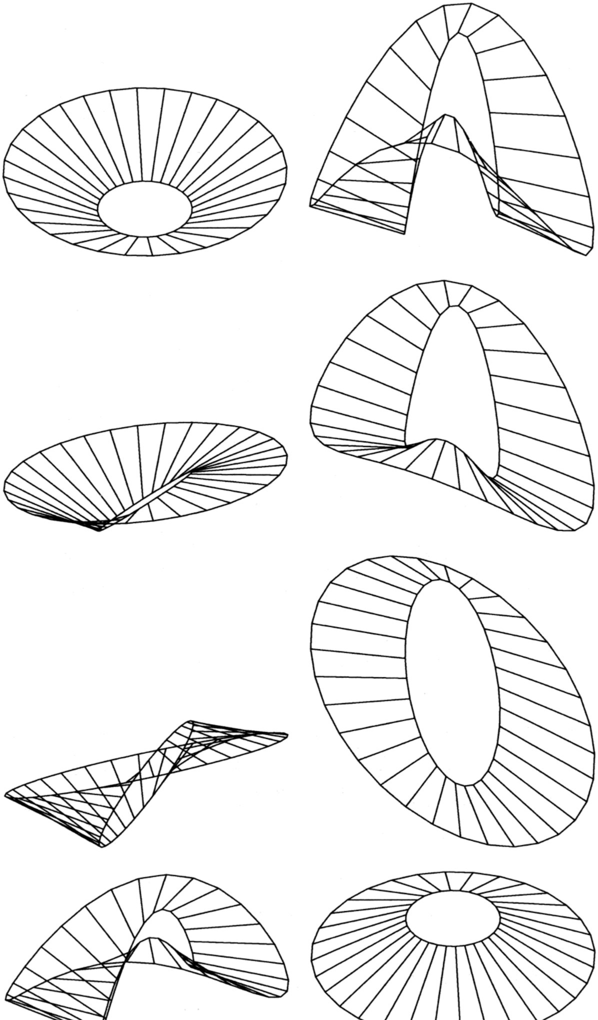


図 27.6　円錐の裏返し．始めから終わりまで

の零点が離れているなら，十分小さな ε に対しては

$$\frac{dg_t(\alpha)}{d\alpha}+\varepsilon(r-2)\frac{dh_t(\alpha)}{d\alpha} \quad と \quad h_t(\alpha)$$

の零点も離れている．

今や戦略ははっきりしている．まず，ロープの軸(つまり $g(\alpha)$ のグラフ)の形を変え，水平でない曲線にし，その後その水平でない線分の上で横木の傾き($h(\alpha)$ の符号)を正から負に間違いなく変えることができる．

図 27.4 の左のスケッチは $g_t(\alpha)$ のグラフである．グラフは実線と破線で描いてあるが，前者は対応する点 α で $h_t(\alpha)$ が正であることを意味し，後者は負であることを意味している．$t{=}1/2$ である中間の図は，時間反転 $t{\mapsto}1{-}t$ に関して対称である．このときから，手続きは後ろ向きに繰り返すだけである．図 27.4 の右は勾配ベクトル場の対応する変形を表しており，これが元の問題の答えになっている．

図 27.5 は関数 z_t の $t{=}1/8,\ 1/4,\ 3/8,\ 1/2$ に対するレベル曲線を示したもので，図 27.6 では始めから終わりまでの変形の全体が示されている．

27.3　コメント

27.2 節で具体的に構成した変形が存在することは，微分トポロジーにおいて現在も発展中のテーマである h 原理から導かれる．実際，そのような変形の存在こそが，[27](4.1 節)で論じられているグロモフの h 原理の最初の応用であって，その演習問題としてその具体的な変形の構成をするという問題が載っている．本書で行った構成は論文[80]に基づいている．我々が知るかぎり，この講義で論じた問題は 1970 年代に「数学的娯楽(Mathematical divertissement)」と題した講義の中で，M. クラスノセルスキーが提案したものである．

第 12 講(第 2 巻)で論じたホイットニーの定理は h 原理の初期の先駆的業績であった．同じ第 12 講の中で述べられている球面の裏返しもまたこの理論(より正確にはスメイル=ハーシュのはめ込み理論)が顔を出したものである．もう 1 つの有名な結果である，ナッシュ=カイパーの定理を述べておこう．そ

の定理は微分可能だが，2回微分可能ではない写像に関するものである．一般的な定理の形での定式化はせず，それから得られる顕著な結果を述べることにしよう．それは「単位球面を任意に小さな球体の中に，微分可能で等長に埋め込むことができる」というものである．等長埋め込みが2回微分可能であるなら，こういうことは不可能である！

本講の数学を開拓した人びと



ミーシャ・グロモフ (1943年生まれ)
ソ連(ロシア)ボクシトゴルスクの生まれ．レニングラード大学助教授，パリ第6大学教授，IHES教授を務める．フランス国籍を取得．シンプレクティック幾何を研究．グロモフ不変量，グロモフ=ハウスドルフ収束，グロモフ δ 双曲空間が知られている．



モリス・ハーシュ (1933年生まれ)
カリフォルニア大学教授．トポロジー，群論を研究．著書で日本語に訳されているものに，S. スメイルとの共著『力学系入門』，『微分トポロジー』がある．



M. A. クラスノセルスキー (1920-1997)
ウクライナの生まれ．キエフ大学物理・数学部卒業後，ソ連軍に4年．ウクライナ科学アカデミーの研究員，モスクワ大学上級科学研究員，モスクワ科学アカデミーの制御科学研究所長を務める．力学，工学，制御理論に由来する積分方程式，微分方程式，関数方程式を研究．



ニコラス・カイパー (1920-1994)
オランダの数学者．微分幾何，微分トポロジー，力学系，統計学を研究．ライデン自由大学で学位．渡米しS. スメイルに出会い，チャーンと親交．アムステルダム大学教授，IHES所長を務めた．ヒルベルト多様体の発見，ナッシュ=カイパーの定理，カイパー検定で知られる．



ジョン・ナッシュ (1928 年生まれ)
化学から数学・国際経済学を学ぶ．現在はプリンストン大学研究員．ゲーム理論，代数幾何学，微分幾何学，偏微分方程式を研究し，市場経済学，進化生物学，計算理論，人工知能などへ応用．ノーベル経済学賞受賞．映画『ビューティフル・マインド』のモデル．

ステファン・スメイル (1930 年生まれ)
コロンビア大学教授，カリフォルニア大学バークレイ校教授，香港市立大学教授を務める．5 次元以上のポアンカレ予想の解決でフィールズ賞を受賞．トポロジー，力学系，経済学，数値解析を研究．スメイルの馬蹄型写像，スメイルの 18 問題が有名．ベトナム反戦運動家でも有名．



演習問題

27.1 (a) 局所的な最大値を 2 つ持ち，局所的な最小値も鞍点も持たないような 2 変数関数を作れ．この関数のレベル曲線と勾配線を描け．

(b)* そのような関数として多項式を取ることができるか？

27.2 (a) 局所的な最小値を 1 つだけ持ち，他の臨界点を持たないような 2 変数の関数で，この局所的な最小値が絶対的な最小値でないようなものを作れ．この関数のレベル曲線と勾配線を描け．

(b)* そのような関数として多項式を取ることができるか？

27.3** $f(x,y)=\cos x\cos y$ とする．関数 f の臨界点は，$k+l$ が偶数である点 $(\pi k/2, \pi l/2)$ からなる格子を作る．この格子の補集合において，$f(x,y)$ の勾配ベクトル場と $-f(x,y)$ の勾配ベクトル場という，2 つの非退化なベクトル場を考える．非退化なベクトル場のクラスの中で，一方の場から他方の場への連続的な変形を構成せよ．

コメント．類似の結果が，孤立した局所的な最大値，最小値，鞍点を持つどんな滑らかな関数に対しても成り立つ．

27.4 値域が $(0,\infty)$ であるような 2 変数の多項式を作れ.

コメント. 本質的に, この問題は 1969 年のパットナムコンテスト[*3]で出されたものである. この問題で 10 点満点で 8, 9, 10 という得点を取ったのは出場者のわずか 1% であった. 試験問題が印刷された時点では, そのような多項式が存在することは信じられていなかった.

[*3] [訳註]正式にはウィリアム・ローウェル・パットナム数学コンテスト(William Lowell Putnam Mathematical Competition)という. アメリカ合衆国とカナダの大学生に対して毎年行われるコンテストで, 高位入賞者には奨学金が与えられる. 1927 年に W. L. パットナムの思い出のために妻のエリザベスによって始められた. 1938 年からは毎年行われるようになり, アメリカ数学協会が管轄している.

第28講 楕円の中のビリヤードと楕円面上の測地線

28.1 平面ビリヤード

平面領域の内部における自由な点の運動を記述するのがビリヤード系である．点は境界にぶつかるまでは直線に沿って一定の速さで運動し，ぶつかったら幾何光学でよく知られた「入射角と反射角は等しい」という法則に従って反射する．同じことだが，完璧な鏡で作られた境界で反射する光線をイメージしてもよい．この講義では，滑らかで凸な曲線 γ によって囲まれているビリヤード・テーブルを考える．

ビリヤードの反射は，ビリヤードの入射軌道を反射軌道に写す写像となる．これを「ビリヤード写像」と呼び，T と表す．写像 T はビリヤード・テーブルの境界と交わる向きづけられた直線の集合の上で定義される．境界に接している直線に対しては，写像 T は何もしないことにする．

向きづけられた直線は，境界曲線 γ との 2 つの交点によって特徴づけることができる．写像 T は xy を yz に写すのである(図 28.1 参照)．

反射の法則はある極値問題の解として説明することができる[*1]．点 x と z を固定し，y を動かしてみる．

補題 28.1 直線 xy と yz が γ となす角が等しくなるのは，y が関数 $|xy|+|yz|$ の極値点である，つまり

(28.1) $$\frac{\partial(|xy|+|yz|)}{\partial y}=0$$

[*1] [原註]他の多くの物理法則と同じである．光の伝播を記述する法則はフェルマの原理と呼ばれる．つまり，ある点からある点へ行くのに光が「選ぶ」軌跡は，時間が最小になるものであるという原理である．

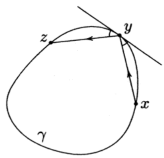


図 28.1　ビリヤード写像

を満たすとき，かつそのときに限る．

証明▶ 最初に，y が γ に拘束されておらず，自由に動く点であると仮定する．関数 $|xy|$ の勾配ベクトルは x から y に向かう単位ベクトルで，関数 $|yz|$ の勾配ベクトルは z から y に向かう単位ベクトルになる．実際，たとえば xy が，端点 x で固定されたゴムの紐であれば，もう 1 つの端点 y は真っ直ぐに x に向かって単位の速さで動くだろう．

γ に拘束された点 y が関数 $|xy|+|yz|$ の臨界点であるのは，2 つの勾配ベクトルの和が γ に直交するとき，かつそのときに限る(これは解析ではよく知られたラグランジュの未定乗数法の原理である)．このことは，xy と yz が γ となす角が同じであることと同値である．◀

力学の言葉で言えば，「ワイヤ」γ 上の点(ビーズと言う方がいいかもしれない)に，2 本のゴムの紐によって，y から x にと y から z にという 2 つの方向の単位の強さの力が働いている．点 y が平衡状態にあるのは，合成された力が γ に直交しているときである．

第 19 講(第 2 巻)で，ビリヤード写像が不変な面積要素を持つことを述べた．この面積要素は第 19 講の主たるテーマであり，平面上の向きづけられた直線の作る空間上の面積のことである．ここでは，補題 28.1 の変分原理からこの事実を導くことにする．

曲線 γ の弧長によるパラメータづけを考え，x と y をこのパラメータの 2 つの値，つまり，この曲線上の 2 点とする．そのとき，(x,y) はビリヤード・テーブルと交わる向きづけられた直線の空間の上の座標になっている．

定理 28.1　面積要素

(28.2) $$\omega(x,y)=\frac{\partial^2|xy|}{\partial x\partial y}\,dxdy$$

はビリヤード写像 T の下で不変である．

証明の前にはっきりさせておく方がよいことがある．$dxdy$ は，辺が座標軸に平行で，長さが dx と dy であるような無限小の箱の**向きづけられた**面積であり，この意味で，$dydy{=}0$, $dxdy{=}-dydx$ である[*2]．

証明▶ 方程式(28.1)を微分すると

$$\frac{\partial^2|xy|}{\partial x\partial y}\,dx+\frac{\partial^2|xy|}{\partial y^2}\,dy+\frac{\partial^2|yz|}{\partial y^2}\,dy+\frac{\partial^2|yz|}{\partial y\partial z}\,dz=0$$

となる．これに dy を掛け，$dydy{=}0$, $dzdy{=}-dydz$ を勘定に入れると，

$$\frac{\partial^2|xy|}{\partial x\partial y}\,dxdy=\frac{\partial^2|yz|}{\partial y\partial z}\,dydz$$

が得られる．最後の等式は $\omega(x,y){=}\omega(y,z)$ であることを意味しており，これが定理で主張したことである．◀

28.2 円錐曲線の光学

楕円は，幾何的には，与えられた 2 点 F_1 と F_2 からの距離の和が一定の点の軌跡として定義される．この 2 点 F_1, F_2 を焦点と呼ぶ．楕円は，端点を焦点に固定された紐を使って作図することができる(図 28.2 参照)．これを楕円の「紐作図」と言うことがある．双曲線は同様に，2 点からの距離の和の代わりに，距離の差の絶対値を使って定義される．そして放物線は，ある点(焦点)と直線からの距離が等しい点の軌跡である．

次の円錐曲線の光学的な性質は古代ギリシャ人も知っていたことである．

補題 28.2 楕円の 1 つの焦点から出た光線は，境界である楕円で反射すると，もう 1 つの焦点を通る光線になる．

---

*2 [原注]専門的に正しい記号は $dx\wedge dy$ であり，この積 $\wedge$ は歪対称であると言う．

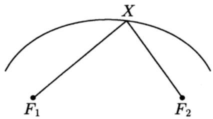


図 28.2　楕円の紐作図：$|F_1X|+|F_2X|=$一定

証明▶ 直線 F_1X と F_2X が図 28.2 の楕円となす角の等しいことを証明したいのである．

X が平面上を自由に動くと仮定する．楕円は関数 $f(X)=|F_1X|+|F_2X|$ のレベル曲線であり，この関数の点 X での勾配ベクトルは曲線に直交している．補題 28.1 の証明と同じように，関数 $f(X)$ の勾配ベクトルは，F_1X と F_2X という 2 方向の単位ベクトルの和であることがわかる．この和が曲線と直交するのは，2 つのベクトルが曲線となす角の等しいとき，かつそのときに限る．これが示すべきことであった．◀

同じように，放物線の焦点から出発する光線が境界の放物線で反射すると軸に平行な光線となる(図 28.3 参照)．演習問題 28.3 参照．放物線のこの光学的性質は，投光器や懐中電灯などの光学的装置の設計に数多く応用されており，本書でも既に第 15 講(第 2 巻)で使っている．

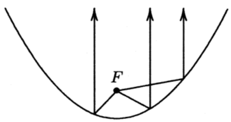


図 28.3　放物線の光学的性質

同じ焦点を持つ楕円と双曲線で，点 X を通るものを考える．

補題 28.3　そのような楕円と双曲線は互いに直交する．

証明▶ 双曲線は関数 $g(X)=|F_1X|-|F_2X|$ のレベル曲線であり，点 X におけるその勾配ベクトルは，F_1X と F_2X の方向を持つ 2 つの単位ベクトルの差になる．2 つの単位ベクトルの差は和と直交するので，2 つの曲線は互いに直交する．◀

与えられた焦点を持つ楕円の作図には紐の長さというパラメータがある．焦点を固定した円錐曲線の族は共焦点族と呼ばれる．λ をパラメータとして，

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1 \tag{28.3}$$

は，楕円と双曲線を含む，共焦点族の方程式である*3．

次の結果は補題 28.2 を，焦点を通らないビリヤードの軌跡に拡張するものである．

定理 28.2 楕円内部のビリヤードの軌跡は，ある共焦点族に属するある円錐曲線に接し続ける．より厳密に言えば，もしビリヤードの軌跡のある線分*4が線分 F_1F_2 と交わらないなら，この軌跡の線分はすべて，線分 F_1F_2 とは交わらず，F_1, F_2 を焦点とするある楕円に接する．そして，軌跡のある線分が線分 F_1F_2 に交わるなら，この軌跡の線分はすべて線分 F_1F_2 に交わり，F_1, F_2 を焦点とするある双曲線に接する．

証明▶ A_0A_1 と A_1A_2 をあるビリヤードの軌跡の連続する線分とする(図 28.4 参照)．A_0A_1 が線分 F_1F_2 と交わらないと仮定する(交わる場合も同じように扱うことができる)．楕円の光学的性質から，線分 F_1A_1 と F_2A_1 が楕円

---

*3 [訳註](28.3)式は，$F_\pm=(\pm\sqrt{a^2-b^2},0)$ を焦点とする共焦点楕円族の方程式である．$F_\pm=(\pm\sqrt{a^2+b^2},0)$ を焦点とする共焦点双曲線族の方程式は $\dfrac{x^2}{a^2+\lambda}-\dfrac{y^2}{b^2-\lambda}=1$ で与えられる．同時に表したければ

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{\lambda\pm b^2}=1$$

とし，複号を楕円では +，双曲線では − と考えるとよい．演習問題 28.2(b)では(28.3)式はこの形で考える方がわかりやすい．もちろんこの場合，楕円を表すためには $a^2+\lambda$, $b^2+\lambda>0$ でなければならないし，双曲線を表すためには $b^2<\lambda$ でなければならない．

そこで，式は(28.3)式のままで，λ の範囲によって表される図形が異なると考える方がよいこともある．28.5 節ではその形で考えている．a, b の大小関係によって範囲の取り方が変わるが，難しくはない．ただし，λ の値によっては実の図形を表さないこともある．

また，$F=(e,0)$ を焦点とし，x 軸と垂直な準線を持つ放物線族の方程式は $y^2=4(e+\lambda)(x+\lambda)$ となる．

*4 [訳註]軌跡の線分とは，軌跡が境界で反射してから，次に境界に達するまでの区間を意味している．

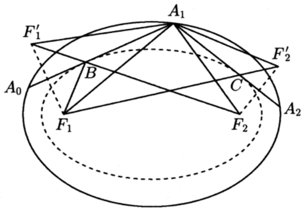


図 28.4　定理 28.2 の証明

となす角は等しいことが分かる．同じように，線分 A_0A_1 と A_2A_1 は，楕円と等しい角をなす．それゆえ，$\angle A_0A_1F_1=\angle A_2A_1F_2$ となる．

F_1 を A_0A_1 に関して折り返した点を F_1'，F_2 を A_1A_2 に関して折り返した点を F_2' とする．B を直線 $F_1'F_2$ と A_0A_1 との交点とし，C を直線 $F_2'F_1$ と A_1A_2 との交点とする．

直線 A_0A_1 に接し，F_1 と F_2 を焦点とする楕円 Γ_1 を考える．$\angle F_2BA_1=\angle F_1'BA_0$ なので，$\angle F_1'BA_0=\angle F_1BA_0$ であり，$\angle F_2BA_1=\angle F_1BA_0$ である．それゆえ，楕円の光学的性質により，楕円 Γ_1 は点 B で A_0A_1 に接する．同じように，F_1 と F_2 を焦点とする楕円 Γ_2 は点 C で A_1A_2 に接する．この 2 つの楕円が一致することを示したい．そのことは $F_1B+BF_2=F_1C+CF_2$ であることと同値であり，$F_1'F_2=F_1F_2'$ と書き直して，この式を示すことにする．

三角形 $F_1'A_1F_2$ と $F_1A_1F_2'$ が合同であることが言える．実際，対称性から $F_1'A_1=F_1A_1$ かつ $F_2A_1=F_2'A_1$ である．さらに $\angle F_1'A_1F_2=\angle F_1A_1F_2'$ だからである．この角の等式は次のようにして得られる．$\angle A_0A_1F_1=A_2A_1F_2$ であり，それゆえ $\angle F_1'A_1F_1=\angle F_2'A_1F_2$ となり，それに共通の角 $\angle F_1A_1F_2$ を足すと，$\angle F_1'A_1F_2=\angle F_1A_1F_2'$ が導かれる．

三角形 $F_1'A_1F_2$ と三角形 $F_1A_1F_2'$ が合同だから，$F_1'F_2=F_1F_2'$ が得られる．これで証明が終わる．◀

この定理の応用として，壁のすべてが反射する鏡である部屋であって，どの点に照明を置いても，部屋全体を照らすことができないような部屋の構成がある．それはライオネル・ペンローズとロジャー・ペンローズ[60]によって構成された*5．図 28.5 がその部屋の図である．上下の曲線はそれぞれ，F_1, F_2

と G_1, G_2 を焦点とする楕円の半分である．焦点の間(の点線で表された線分)を通る光線が反射すると，同じ焦点の間を通る光線になるので，どんな光線も直線 F_1F_2 と G_1G_2 の間の領域から 4 つの耳たぶ状の領域には入り込めないし，その逆に進むこともない．こうして，光源が直線 G_1G_2 の上方にあれば，下の耳たぶが照らされることはないし，光源が F_1F_2 の下方にあれば，上の耳たぶは照らされない．

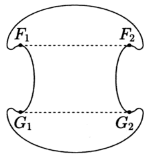


図 28.5　この部屋はどの 1 点からも全体を照明することができない

28.3　焦線と紐作図とグレイヴズの定理

焦線[*6]とは，ビリヤード・テーブル内部の曲線であって，ビリヤードの軌跡の線分がこの曲線に接していれば反射した線分もこの曲線に接するような曲線のことである．焦線が滑らかで凸であることを仮定する．

楕円の紐作図(図 28.2)に似た，焦線からビリヤード・テーブルを再現する**紐作図**法がある．焦線 Γ の周りを，伸びない閉じた紐で包み，紐の 1 点を強く引っぱりながらこの点を動かして回れば，ビリヤード・テーブルの境界 γ が得られる(図 28.6 参照)．

定理 28.3　γ の内部でのビリヤードでは，Γ が焦線となる．

証明▶ Γ 上に基準点 Y を選ぶ．γ 内部の点 X に対し，$f(X)$ と $g(X)$ を，

---

*5 [原註]ロジャー・ペンローズは指導的な現代数理物理学者である．ライオネル・ペンローズは彼の父親で，著名な精神科医で遺伝学者であった．

*6 [原註]焦線にはまた，ある曲線の法線族の包絡線という異なる意味がある．第 2 巻第 10 講では焦線をその意味で使っている．

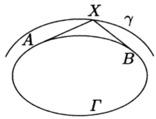


図 28.6　紐作図．焦線からビリヤード・テーブルを再現

それぞれ右からと左から Γ を回っての，X から Y への距離とする[*7]．すると，γ は関数 $f(X)+g(X)$ のレベル曲線である．証明したいことは，線分 AX と BX の γ となす角が等しいことである．

f の X での勾配ベクトルが AX 方向の単位ベクトルであることを言おう．実際，紐 YAX が縮むものなら，その自由端点 X は，単位の速さで真っ直ぐ点 A に向かって動く(補題 28.1 と補題 28.2 の証明と比べよ)．これから，関数 $f+g$ の勾配ベクトルが $\angle AXB$ を 2 等分することが分かる．一般に，関数の勾配ベクトルはそのレベル曲線に直交するので，AX と BX は γ と同じ角をなすことになる．◀

紐作図によって，ビリヤード・テーブル[*8]の 1 パラメータ族が得られることに注意する．パラメータは紐の長さである．

定理 28.2 から，次のグレイヴズの定理が得られる．「伸びない凸な紐で楕円の周りを包むことによって，共焦点楕円族が得られる．」グレイヴズの定理のこれ以外の証明については[63]を参照すること．

28.4　幾何的結果

1 つの楕円に対し，それと交わる向きづけられた直線の空間はトポロジー的には円柱である[*9]．この円柱はビリヤード写像の不変曲線によって葉化(ようか)され

---

*7　[訳註]図 28.6 を見る．Y がどこにあるにしても，X から接点 A までの線分の長さと，A から Y までの Γ 上の距離の和が $f(X)$ である．

*8　[訳註]ビリヤード・テーブルという言葉が，境界曲線を指すか，内部の領域を指すかは，文脈によってどちらかであったり，両方であったりしている．

*9　[訳註]X と Y がトポロジー的には同じであるというのは，トポロジーという学問分野で関心を持っている抽象化のレベルでは同じであるという意味であって，トポロジーでの手段を使って対処する際，X と Y を区別しないことを意味している．もちろん，同じだと言っても，それぞれに異なる背景があるからこそ，X と Y を異なる名前で呼んでいる．訳注 11 も参照．

ている*[10](図 28.7*[11]参照)．それぞれの曲線は，ある共焦点円錐曲線族に接する光線の族を表している．∞ の形をした曲線は，2 つの焦点を通る光線の族に対応している．この曲線の 2 つの特異点は 2 つの反対の向きを持つ楕円の長軸に対応しており，周期 2 で往復するビリヤードの軌跡である．そのほかにも周期 2 の軌跡が 2 つある．それは楕円の短軸であって，∞ 形の曲線の内側の領域の 2 つの中心によって表される．

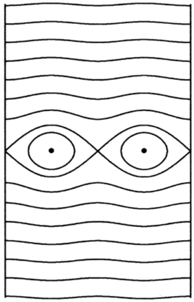


図 28.7 ある楕円の中のビリヤード写像の相図

円柱を 1 周する不変曲線を考える．その曲線の点は共焦点楕円族に接する光線を表している(∞ の形の曲線の内側にある不変曲線は，共焦点双曲線族に接する光線を表す)．

*10 [訳註]円柱という多様体に，不変曲線を葉(leaf)とする葉層構造(foliation)を入れるということを，円柱を葉化する(foliate)ということがある．厳密な定義は，たとえば田村一郎『葉層のトポロジー』岩波書店(1976)などにある．

*11 [訳註]楕円 γ を選び，γ に交わる直線の空間を P とする．γ 内部のビリヤードという力学系の運動を考えると，局所時間的には γ 内部の向きづけられた線分上の等速運動であり，その線分，つまり空間 P の点で表される．その意味で，この力学系の相空間(phase space)は P であると思ってよい．その上で，力学系は，空間 P の点が，ビリヤード・テーブルの境界である γ で反射することによって別の点に写されることによって表されると考えている．これがビリヤード写像 T であった．不変曲線とは相空間の曲線で，運動によって全体としては変わらないもののことだから，図 28.7 に描かれた T によって不変な曲線を不変曲線と呼んでいる．また，相空間の中で，力学系の軌道の様子を全体として表現する図を相図(phase portrait)と呼ぶ．

今の場合，P は力学系での運動の様子を理解するためにあり，円柱は幾何学的に全体的に考えるためにある．厳密な言葉ではそうした意味を考えることとは無関係に，X と Y の間に位相同型，つまり同相写像が存在することを，そのことだけを意味している．

定理 28.4　各不変曲線の上に周期的な座標 $x \bmod 1$ であって，ビリヤード写像が $T(x)=x+c$ という式で与えられるようなものを選ぶことができる(定数 c の値は不変曲線ごとに異なる)．

証明▶ 求める座標 x は，不変曲線族と(28.2)式の円柱上の面積要素 ω という，既に述べた 2 つの構造によって定まる．

レベル曲線がビリヤード写像の不変曲線であるような，円柱上の関数 f を選ぶ．γ をレベル曲線 $f=a$ とする．$f=a+\varepsilon$ によって与えられる，γ の近くのレベル曲線 γ_ε を考える．区間 $I\subset\gamma$ に対して，I の上の，γ と γ_ε の間の面積 $\omega(I,\varepsilon)$ を考える．明らかに，$\varepsilon\to 0$ のとき，この面積は 0 に近づく．I の「長さ」を

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\omega(I,\varepsilon)}{\varepsilon}$$

と定義する．別の関数 f を選んで*[12]，無限小 ε を別のもの，たとえば δ に置き換えると，あらゆる線分の長さは同じ因数 δ/ε 倍になる．座標 x を線素が dx であるように選び，全体の長さが 1 になるように x を正規化する．これによって，座標 x が「$x\mapsto x+$定数」というずらしを除いて定まる．

ビリヤード写像 T は面積要素 ω と不変曲線を保つので，T は不変曲線上の長さの要素を保ち，それゆえ，各不変曲線上で $x\mapsto x+c$ という式で与えられる(もちろん，定数 c の値は不変曲線による)．◀

この定理から得られるのは，まず，楕円の中のビリヤードの軌跡が閉じているという次の定理である(第 29 講参照)．

系 28.5　楕円 γ の中の，γ と共焦点の楕円 Γ に接するビリヤードの軌跡の周期が n であると仮定すれば，楕円 γ の中の，Γ に接するあらゆるビリヤードの軌跡の周期は n である．

---

*[12] [訳註]もちろん，f がビリヤード写像の不変曲線であるように選ぶ．

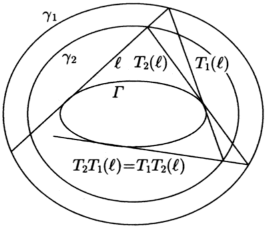


図 28.8 共焦点楕円における可換なビリヤード写像

証明▶ Γ に接する光線からなる不変曲線を考える．定理 28.4 の座標 x では，ビリヤード写像は $x \mapsto x+c$ である．点が周期 n であるのは，nc が整数であるとき，かつそのときに限る．しかしこれは x に依らない条件なので，結論が導かれる．◀

γ_1, γ_2 と Γ を共焦点の楕円とする(図 28.8 参照)．γ_1 と γ_2 での反射に対応して 2 つのビリヤード写像 T_1 と T_2 が得られる．この写像は 2 つとも，両方の楕円と交わる向きづけられた直線が作る空間*[13]の上に働き，焦線 Γ を共有する．この焦線に対応する不変曲線上のパラメータ x の選択は，向きづけられた直線の空間の面積要素と共焦点楕円族にのみ依存するが，そのどちらも両方の写像に対して同じものである．こうして次の系が得られる．

系 28.6 写像 T_1 と T_2 は可換である．つまり $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ が成り立つ(これから得られる配置の定理については図 28.9 参照)．

証明▶ 平行移動 $x \mapsto x+c_1$ と $x \mapsto x+c_2$ は可換である．◀

Γ が 2 つの焦点を結ぶ線分に退化している場合には，ユークリッド幾何のもっとも初歩の定理*[14]

$$AB+BF = AD+DF \quad \Leftrightarrow \quad AC+CF = AE+EF$$

*[13] [訳註] γ_1 と γ_2 に対して，相空間として，それぞれの楕円に交わる向きづけられた直線の空間を考え，その 2 つを同一視すると考えた方がわかりやすいかもしれない．

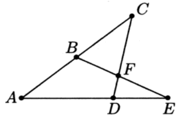


図 28.9　ユークリッド幾何のもっとも初歩の定理

が得られる(図 28.9 参照). 実際, 点 B と D が A と F を焦点とするある楕円上にあることと, 点 C と E が A と F を焦点とするある楕円上にあることは同値である*15.

28.5　楕円座標

共焦点円錐曲線族(28.3)に戻るとしよう. 一般の点 $P(x, y)$ を, この族に属する楕円と双曲線が通っている(点 P は焦点を結ぶ線分上にあってはいけない. この条件が, この場合の, 点 P が一般の位置にあるという仮定である). λ_1 と λ_2 をそれぞれパラメータ λ の値とする. そのとき (λ_1, λ_2) は点 P の**楕円座標**と呼ばれる. 共焦点族(28.3)の楕円と双曲線がこの座標系での座標曲線の役割をする. 補題 28.3 により, それらは互いに直交している(図 28.10 参照).

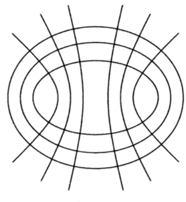


図 28.10　共焦点楕円族と共焦点双曲線族

*14 [原註]オーストラリアの数理物理学者 M. アーカート (1902-1966) によって発見された. 後になって, この定理はずっと以前, 1841 年にド・モルガンによって公表されていたことが分かった. これは, 第 15 講の M. ベリーの法則のもう 1 つの実例になっている.

*15 [訳註] A と F を焦点とし, B を通る楕円があって, A から B への光線が B で反射して F に戻り, また D を通る楕円があって, A から D への光線が D で反射して F に戻るのだが, その 2 つの楕円が同じ楕円であることを左の等式が表していると考える. 右の等式も同様に考える. 左右の楕円の中のビリヤードの相空間を同一視するとき, ビリヤードの軌跡の線分 AB が与える点と AC が与える点は同じ点であると考えることができる. 他の BF と EF, AD と AE, DF と CF もそれぞれ同じ点と考えることができる.

今度は空間において

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

で与えられる楕円面 M を考える．ここで，すべての半軸 a, b, c が異なっていて，$0<a<b<c$ であるとする．2 次曲面の共焦点族 M_λ は方程式

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1 \tag{28.4}$$

によって定義される．ここで λ は実パラメータである．λ が $-b^2$ と $-a^2$ の値を通るときに曲面 M_λ の型が変わる．$-c^2<\lambda<-b^2$ のときは二葉双曲面であり，$-b^2<\lambda<-a^2$ のときは一葉双曲面であり，$-a^2<\lambda$ のときは楕円面である(図 28.11 参照)*16.

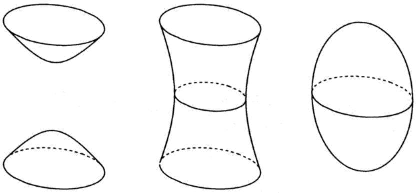


図 28.11　共焦点 2 次曲面

平面の場合と同じように，点 (x, y, z) の楕円座標を，方程式(28.4)を満たす λ の 3 つの値として導入する．そのことが正当化される理由は，次の定理によって与えられる．

> **定理 28.7**　一般の点 $P=(x, y, z)$ は，与えられた楕円面と共焦点の，ちょうど 3 つの 2 次曲面に含まれる．これらの共焦点 2 次曲面は点 P で互いに直交する(図 28.12 参照).

証明▶ 点 P が与えられると，方程式(28.4)は λ の 3 次方程式に書き直すことができる．それが 3 実根を持つことを示したい．実際，λ の関数としての，

*16 [訳註]もちろん，$-c^2>\lambda$ のときには実の図形を表さない．

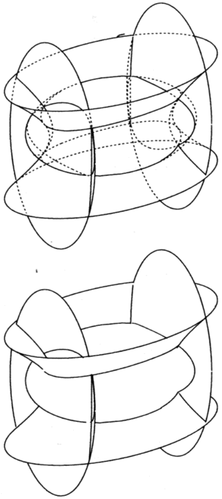


図 28.12　3 つの互いに直交する共焦点 2 次曲面．
透明な図と不透明な図

左辺のグラフは図 28.13 に描かれたようになる．したがって，この関数は 1 という値を 3 回取ることになる($xyz \neq 0$ を仮定すれば，今の議論には十分である．一般には，λ に関する 3 次方程式の判別式が 0 でないことを仮定する必要がある)．$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ を根とする．

次に，2 次曲面が点 P で互いに直交することを示したい．たとえば，M_{λ_1} と M_{λ_2} を考える．点 P での M_{λ_1} への法ベクトルは(28.4)の左辺の関数の勾

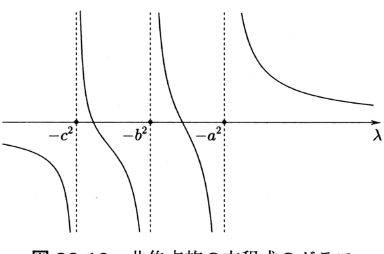


図 28.13　共焦点族の方程式のグラフ

配ベクトル

$$N_1 = \left(\frac{x}{a^2+\lambda_1}, \frac{y}{b^2+\lambda_1}, \frac{z}{c^2+\lambda_1} \right)$$

であり(簡単のため 2 で割ってある)，N_2 に対しても同様の式になる．それゆえ，

(28.5)

$$N_1 \cdot N_2 = \frac{x^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)}$$

となる．λ_1 と λ_2 に対する方程式(28.4)を考える．左辺の差は，(28.5)の右辺に $(\lambda_1 - \lambda_2)$ を掛けたものになる．それゆえ，この右辺は 0 であり，$N_1 \cdot N_2 = 0$ となる．これが示したいことであった．◀

28.6 見かけの輪郭とシャールの定理

本節の目的は，次のシャールの定理を証明することである．

定理 28.8 空間における一般の直線は，与えられた共焦点 2 次曲面族の 2 つの異なる 2 次曲面に接する．直線との接点におけるこの 2 次曲面の接平面は互いに直交する．

ℓ をその直線とする．証明の戦略は，直線 ℓ に沿って，ℓ に直交する平面に射影することである．曲面の平面(スクリーン)への一般の直交射影は，ある曲線を境界とする領域となる．この曲線を曲面の**見かけの輪郭**(または単に影)と言う．見かけの輪郭は，曲面に接し ℓ に平行な直線とスクリーンとの交点の軌跡である．たとえば，凸な曲面の見かけの輪郭は卵形線である．

共焦点 2 次曲面族の射影は見かけの輪郭の 1 パラメータ族を作る．

命題 28.4 共焦点 2 次曲面族の射影は共焦点 2 次曲線族となる．

この命題からシャールの定理が導かれる．

定理 28.8 の証明▶ 直線 ℓ の射影は 1 点である．この点を通る，ある共焦点族の楕円と双曲線があり，それらは互いに直交している．この 2 曲線はそれぞれ，与えられた共焦点族の 2 次曲面の見かけの輪郭である．したがって，この 2 つの曲面は ℓ に接しており，接点で直交する．◀

命題 28.4 の証明▶ まず第 1 に，容易に，個々の 2 次曲面の見かけの輪郭が円錐曲線であることを示すことができる．

スクリーンが水平な (x,y) 平面であり，ℓ がそれに垂直な直線であると仮定する．2 次曲面 M は x,y,z に関する 2 次方程式で与えられる．その具体的な形は重要ではない(この方程式は 10 個の項の線形結合である．それは，$x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx, x, y, z$ と定数の 10 個の項である)．スクリーンの与えられた点 (x,y) に対して，この点を通る垂直線は (x,y,t) というパラメータ表示を持つ．これを M の方程式に代入すると，t に関する 2 次方程式

$$p_2(x,y)t^2+p_1(x,y)t+p_0(x,y)=0 \tag{28.6}$$

が得られる．ここで，p_2 は定数，p_1 は x,y の 1 次関数，p_0 は x,y の 2 次関数である．

M の見かけの輪郭は，その点を通る垂直線が M に接するような点 (x,y) からなる．つまり，方程式(28.6)が重根を持つような点からなっている．このことが起こるのは，判別式が 0 になる，つまり

$$p_1(x,y)^2-4p_2(x,y)p_0(x,y)=0$$

となるときである．これは x と y に関する 2 次方程式であり，スクリーン上の円錐曲線を表す．

ここで更に，共焦点 2 次曲面族の見かけの輪郭が共焦点円錐曲線族であることを証明する必要がある．

点 $P(x,y,z)$ での 2 次曲面 M_λ の法ベクトルが

$$N(P)=(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(\frac{x}{a^2+\lambda},\frac{y}{b^2+\lambda},\frac{z}{c^2+\lambda}\right)$$

であることは分かっている．$N(P)\cdot P=1$ となるように，法ベクトル $N(P)$ の

大きさを選ぶ．(28.4)式により，この等式は成り立つ．

P が M_λ 上を動いていくと，点 $N(P)$ は方程式

$$(a^2+\lambda)\bar{x}^2+(b^2+\lambda)\bar{y}^2+(c^2+\lambda)\bar{z}^2=1 \tag{28.7}$$

で与えられる 2 次曲面 $\overline{M}_\lambda$ を描く．この方程式は(28.4)式を書き換えただけのものである．そのような 2 次曲面族を線形族であると言う．Q_1 と Q_2 を 2 次形式

$$a^2\bar{x}^2+b^2\bar{y}^2+c^2\bar{z}^2 \quad と \quad \bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2$$

とするとき，左辺を $Q_1+\lambda Q_2$ という形に書くことができるからである．

スクリーンを W と表す．ℓ に平行な直線が点 P で M_λ に接するのは，法ベクトル $N(P)$ が W と平行であるとき，かつそのときに限る．このようなベクトル $N(P)$ は曲面 M_λ の見かけの輪郭の法ベクトルでもあることに注意する(図 28.14 参照)．

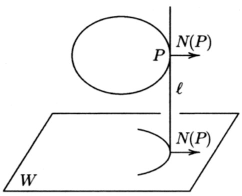


図 28.14　曲面とその見かけの輪郭

2 次曲面 $\overline{M}_\lambda$ と平面 W との交わりの曲線はそのようなベクトル N の集合になっている．この曲線は円錐曲線で，W 上の適当なデカルト座標 (ξ,η) で，(28.7)に似た式

$$(\alpha^2+\lambda)\xi^2+(\beta^2+\lambda)\eta^2=1 \tag{28.8}$$

によって与えられる．こうして，曲面 M_λ の見かけの輪郭の法ベクトルは，平面 W の円錐曲線の線形族をなす．

平面ではまた，同じ理由によって，共焦点円錐曲線族の法線が円錐曲線の線形族をなすことになる．これから，これら見かけの輪郭がスクリーン上に共焦

点族をなすことが導かれる．◀

28.7　楕円面上の測地線

M を曲面とする．M 上の測地線は，M 上に拘束された自由粒子の軌跡である．測地線の弧長によるパラメータ表示を $\gamma(t)$ とすれば，加速度ベクトル $\gamma''(t)$ は M に直交する(物理的には，このことは点に働く力が，点を M に拘束する垂直方向の力のみであることを意味している)．測地線は局所的に点の間の距離を最小にする経路である．たとえば，可展面上の測地線は，曲面を平面に広げた後は直線になる．球面上の測地線は大円である．より詳細な議論については第 20 講を参照のこと．

M を楕円面とする．測地線の挙動は非常に規則的であって，シャールとヤコビの次の定理で記述される．この結果は 19 世紀数学の偉大な業績の 1 つである．2 次曲面の共焦点族が定義されるように，楕円面の軸の長さが異なっていると仮定する[*17]．

定理 28.9　M 上の測地線の接線は，M と共焦点な別の 2 次曲面に接する．

証明▶ M 上の弧長でパラメータづけられた測地線 $\gamma(t)$ を考え，$\ell(t)$ を点 $\gamma(t)$ でこの測地線に接する直線とする．定理 28.8 により，$\ell(t)$ は，M と共焦点で，方程式(28.4)でのパラメータ $\lambda(t)$ に対応する別の 2 次曲面 $M_{\lambda(t)}$ に接する．$\lambda(t)$ が t に依らないこと，つまり

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = 0 \tag{28.9}$$

であることを証明したい．

---

*17　[原註]もちろん，定理 28.9 に述べられている測地線の規則的な挙動は，連続性によって，軸の長さが一致する楕円面，つまり回転楕円面に拡張される．

t の値を固定する．たとえば $t=0$ としよう．N を点 $\gamma(0)$ における M への法ベクトルとし，π を N と直線 $\ell(0)$ で張られる平面とする．近い点 $\gamma(\varepsilon)$ を考える．測地線 γ の加速度ベクトルは M に直交するから，直線 $\ell(\varepsilon)$ は，ε^2 のオーダーの誤差を除いて，平面 π の中にある．

実際，ランダウの「大きい O」の記号を使うと，

$$\gamma(\varepsilon) = \gamma(0)+\varepsilon\gamma'(0)+O(\varepsilon^2), \quad \gamma'(\varepsilon) = \gamma'(0)+\varepsilon\gamma''(0)+O(\varepsilon^2)$$

となる．点 $\gamma(0)$ とベクトル $\gamma'(0)$, $\gamma''(0)$ は平面 π の中にある．それゆえ，ε^2 のオーダーの誤差を除いて，直線 $\ell(\varepsilon)$ の点 $\gamma(\varepsilon)$ とその方向ベクトル $\gamma'(\varepsilon)$ は π の中にある．

y を直線 $\ell(0)$ と $M_{\lambda(0)}$ の接点とする．定理 28.8 により，法ベクトル N は y における $M_{\lambda(0)}$ の接平面の中にある（図 28.15 参照）．$\ell(\varepsilon)$ の平面 π の上への直交射影を $m(\varepsilon)$ と書く．$m(\varepsilon)$ と $\ell(\varepsilon)$ との近さが ε^2 のオーダーであることに注意する．したがって，等式 (28.9) に関しては，$\ell(\varepsilon)$ を $m(\varepsilon)$ で置き換えてもよい，つまり，直線 $\ell(\varepsilon)$ は平面 π に含まれると仮定してもよい．

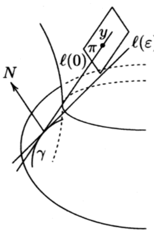


図 28.15 定理 28.9 を証明するために

$\lambda(\varepsilon)-\lambda(0)=O(\varepsilon^2)$ を証明したい．直観的には，これは明らかである．直線 $\ell(\varepsilon)$ は曲面 $M_{\lambda(0)}$ の接平面上にあり，この曲面との近さのオーダーは ε^2 である．この議論に厳密な意味を与えるための補題 28.5 には，専門用語を使った議論が必要となる．

$f(x,\varepsilon)$ を 2 変数の滑らかな関数とする．これを，ε をパラメータとする変数 x の関数の族と考える．$f_\varepsilon(x)$ という記号を使う方が考えやすいかもしれない．関数 $f_0(x)$ が $x=0$ で臨界点を持ち，この臨界点が非退化である，つまり

$f_0''(0)\neq 0$ であると仮定する．また対応する臨界値が 0 である，すなわち $f_0(0)=0$ と仮定する．そのとき，十分小さいあらゆる ε に対し，関数 $f_\varepsilon(x)$ は $x=0$ の近くに臨界点を持つ．対応する臨界値を $c(\varepsilon)$ とする（図 28.16 参照）．

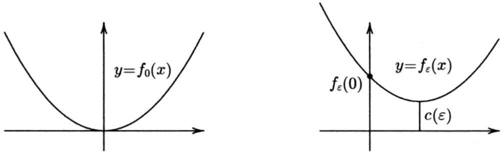


図 28.16　補題 28.5

補題 28.5

(28.10)
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{c(\varepsilon)-f_\varepsilon(0)}{\varepsilon}=0.$$

補題の証明▶ $f_\varepsilon(x)$ を ε の級数に展開して

(28.11)
$$f_\varepsilon(x)=f_0(x)+\varepsilon g(x)+O(\varepsilon^2)$$

と書く．$t(\varepsilon)$ を，関数 $f_\varepsilon(x)$ の 0 の近くにある臨界点とする．$t(0)=0$ だから，$t(\varepsilon)=O(\varepsilon)$ である．(28.11) から

$$c(\varepsilon)=f_\varepsilon(t(\varepsilon))=f_0(t(\varepsilon))+\varepsilon g(t(\varepsilon))+O(\varepsilon^2)$$

が得られる．f_0 は $x=0$ に臨界点を持ち，臨界値が 0 であるから，$f_0(x)=O(x^2)$ であり，それゆえ，$f_0(t(\varepsilon))=O(\varepsilon^2)$ である．また $g(t(\varepsilon))=g(0)+O(\varepsilon)$ である．これから $c(\varepsilon)=\varepsilon g(0)+O(\varepsilon^2)$ が得られる．しかし，(28.11) から $f_\varepsilon(0)=\varepsilon g(0)+O(\varepsilon^2)$ が得られる．それゆえ，$c(\varepsilon)-f_\varepsilon(0)=O(\varepsilon^2)$ となり，(28.10) が得られる．図 28.17 参照．◀

さて，定理 28.9 の証明を完成する用意ができた．直線 $\ell(0)$ と曲面 $M_{\lambda(0)}$ が非退化な仕方で接していると仮定する．そのことは，2 次曲面に対しては，直線が曲面上にないことを意味している（第 2 巻，第 16 講参照）．そのような一般の直線に対して定理の主張を証明した後で，連続性を使って (28.9) 式をすべ

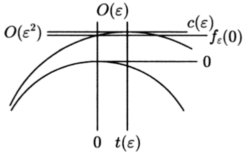


図 28.17 補題 28.5 の証明

ての直線に拡張することにする．

共焦点族(28.4)の曲面 $M_{\lambda(0)}$ は点 y を通るのであった．すると，y の近くのあらゆる点を通る，この共焦点族に属する 2 次曲面があり，対応するこの点の楕円座標 λ を，y のある近傍で定義された関数と考える．特に，y での λ の値は $\lambda(0)$ である．

関数 λ を(この近傍を通る)直線に制限することができる．ある直線への関数 λ の制限が臨界点を持ち，その臨界値が c であるとき，この直線は 2 次曲面 M_c に接する．$\ell(0)$ に十分近いすべての直線を実数直線 $\mathbb{R}$ と同一視するが，$\ell(0)$ 上の原点は y にあるとしておく．x を $\mathbb{R}$ 上の変数とする．関数 λ から $\lambda(0)$ を引き，それを直線 $\ell(\varepsilon)$ に制限したものを $f_\varepsilon(x)$ と書く．

今度は補題 28.5 を適用する．直線 $\ell(0)$ は $M_{\lambda(0)}$ に接するので，関数 $f_0(x)$ は x=0 で臨界点を持ち，その臨界値は 0 である．直線 $\ell(0)$ と $\ell(\varepsilon)$ の原点の間の距離は ε 以上のオーダーになる．直線 $\ell(\varepsilon)$ はレベル曲面 $\{\lambda=\lambda(0)\}$ の接平面 π の中にあるので，この直線の原点からこの曲面までの距離は ε^2 以上のオーダーになる．すなわち $f_\varepsilon(0)=O(\varepsilon^2)$ である．$c(\varepsilon)=\lambda(\varepsilon)-\lambda(0)$ とすると，補題 28.5 により，$\lim_{\varepsilon\to 0} c(\varepsilon)/\varepsilon=0$ となり，(28.9)式が導かれる．◀

定理 28.9 によって，楕円面上の測地線の挙動には非常に強い制限が課されることになる．M 上の測地線 γ を固定する．γ に接する直線は，M と共焦点な別の 2 次曲面 Q に接する．x を γ の点とする．x での M の接平面は，Q とある円錐曲線(x に依存する)に沿って交わる．x からこの円錐曲線への接線の数は 2 か 1 か 0 かのどれかである(接線が 1 本という中間の場合は重複度が 2 であって，x が円錐曲線に属するときに起こる)．こうして，M の固定した点を通る，M と Q の共通接線の数が 2 か 0 かに従って，曲面 M は 2 つの部分

に分かれる．測地線 γ は共通接線の数が 2 である部分に拘束され，そのあらゆる点で取りうる方向は，M と Q の共通接線の 2 つの方向のどちらかになる（図 28.18 参照）．

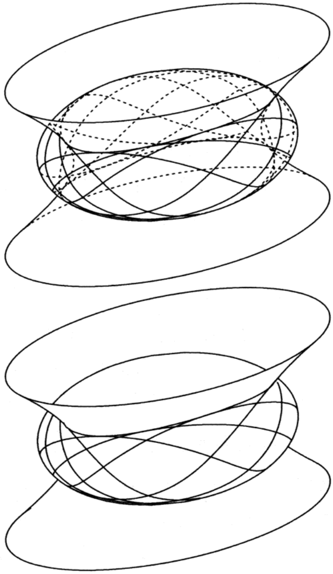


図 28.18　楕円面上の測地線．測地線の接線はある共焦点の双曲面に接する（透明なものと不透明なもの）

最後に注意を 2 つしておこう．1 つ目は，楕円面の内部のビリヤードと楕円面上の測地線に関するほとんどの結果には，多次元の場合にも類似の結果があるということである．たとえば，「n 次元空間の楕円面上の測地線の接線は $n-2$ 個の別の固定された共焦点の 2 次超曲面に接する」といった結果がある．

2 つ目は，もし楕円面の一番短い軸の長さが 0 に近づけば，楕円面は退化して，2 重に被覆された楕円になるが，楕円面上の測地線はこの楕円の内部のビリヤードの軌跡となり，定理 28.9 から定理 28.2 が，極限の場合として導かれるということである．

一般のビリヤードについて，特に楕円面の内部でのビリヤードや楕円面上の

測地線について，これ以上の情報は，たとえば[78],[83]を見るとよい．

本講の数学を開拓した人びと



ミッシェル・シャール (1793-1880)
エコル・ポリテクニク在学中に，ナポレオンが対露戦に敗北した後のパリ防衛戦に参戦．材木商の父の望みで商業に従事するも，数学と歴史への興味に戻る．『幾何学における方法の発展の起源の歴史的概観』で『原論』の失われた3巻に射影に関した記述があることを指摘．

オーガスタス・ド・モルガン (1806-1871)



生後すぐに右目の視力を失う．体が弱く学校時代はひどいイジメに遭った．神学の試験に反発し，ケンブリッジ大学を去る．ロンドン数学会の初代会長．王立協会のフェローやエジンバラ大学の名誉学位は拒絶．ブールとともに論理代数の創始者．数学的帰納法を確立．



カール・グスタフ・ヤコブ・ヤコビ (1804-1851)
ユダヤ人銀行家の家の生まれ．ベルリン大学卒業後，教授資格取得のためキリスト教に改宗．力学(こまの運動)，微分幾何(楕円体の測地線)，変分法，楕円関数論を研究，ヤコビアン，ハミルトン=ヤコビの方程式などで知られる．数学教授法としてのセミナーを始める．

ロジャー・ペンローズ (1931 年生まれ)



一般相対性理論，重力理論を研究し，ホーキング=ペンローズの定理，特異性の定理(重力崩壊がある程度進むと特異点が避けられない)，「宇宙のセンサーシップ」仮説，「ツウィスター・モデル」などが有名．意識の科学にも貢献．

演習問題

28.1 図 28.19 の角を使って，面積要素(28.2)が $\omega = \sin\alpha\ d\alpha dx$ と表すことができることを証明せよ．

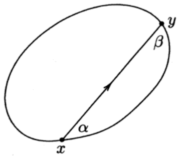


図 28.19　弦に関連した角

28.2 (a) 28.2 節の「紐作図」によって与えられる楕円と双曲線と放物線が，実際に，よく知られた 2 次の方程式で表されることを証明せよ．

(b) 円錐曲線の共焦点族に対する公式(28.3)を導け．

28.3 放物線の光学的性質を証明せよ．

28.4 楕円の中の，焦点を出発したビリヤードの軌跡は楕円の長軸に近づいていくことを証明せよ．

28.5 (a) O を中心とする円盤を考え，A をこの円盤の内部の点とする．円周上のあらゆる点 X に対して，点 X が点 A に重なるように円盤を折り曲げる．このような折れ線の包絡線が，A と O を焦点とする楕円になることを証明せよ．A が円盤の外側にあると，どういうことが起こるのか？*18

(b)* 滑らかな曲線 γ と点 A が与えられたとき，A から発する直線を γ で反射させる．γ の接線で A を反射させて得られる点の軌跡を W とする．曲線 W が反射された直線に直交することを証明せよ．

[ヒント]γ を楕円で近似し，(a)を使え．

*18 [訳註]双曲線になる．また，類似の問題も追加しておく．「平面上の直線 ℓ とその上にない点 A が与えられるとき，ℓ 上のあらゆる点 X に対して，点 X が点 A に重なるように平面を折り曲げて得られる折れ線の包絡線が，A を焦点とし ℓ を準線とする放物線になることを証明せよ．」

28.6 楕円の光学的性質に従えば，楕円の鏡の焦点に置かれた点光源 L から発する光線は，反射した後でもう1つの焦点を通る．しかし，L が焦点にないなら，反射した光線が1点を通るということはなく，それどころか，それらの反射光線は包絡線を持ち，これもまた**焦線**と呼ばれる．このような焦線を目で見てわかるような絵を描け．この際，3つの場合を考えよ．L が焦点に近い場合，L は焦点には近くないが楕円の内部にはある場合，L が楕円の外部にある場合．最後の場合には，楕円の外部が透明であって，内部に入ったら壁で反射するという仮定をする必要がある．

28.7 球面の点から発する測地線はその対蹠点に至る．しかし，球面を楕円面に置き換えると，このことは成り立たなくなる．楕円面の1点から発する測地線の族を，対蹠点の近傍で描け(楕円面を球面に近く取った方がよい)．この族の包絡線がどんな風に見えるか？

警告. 絵を描くときに，楕円面のどんな2点も測地線によって結ぶことができるという事実に矛盾してはならない．

28.8* 平行な光のビームに対するトラップを作図せよ(ここでトラップというのは，閉じてない曲線で，たとえば垂直方向を持つ光線の族がその曲線に入って，幾何光学の法則に従って曲線で反射をし始めると，どんな光線も無限に逃げていくことがないようなもののことである)．

[ヒント]楕円と放物線の光学的性質を使え．

28.9 「ユークリッド幾何のもっとも初歩の定理」の初等幾何的な証明を見つけよ．

28.10 デカルト座標は楕円座標を使って次のように表されることを示せ．

$$x^2 = -\frac{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}{b^2-a^2}, \quad y^2 = \frac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}{b^2-a^2}.$$

28.11 n 次方程式で与えられる代数曲面の見かけの輪郭は N 次方程式によって与えられる平面代数曲線である．このことを証明し，n と N の間の関係を求めよ．

第29講 ポンスレのポリズムとほかの閉包定理

29.1 閉包定理

入れ子になった，つまり一方が他方の内部に含まれるような，2つの楕円γとΓを選び，外側の楕円Γ上に点Xを選び，内側の楕円γへの接線を，外側の楕円との交点Yまで描く．そのあと，Yから始めて同じ作図を繰り返していくと，Γに内接し，γの周りを外接する折れ線が得られる．この手続きが周期的であると仮定する．つまり，n番目の点が最初の点と一致すると仮定する．そこで別の点X_1を取って，そこから同じことを始める．ポンスレの閉包定理は，その折れ線がまたn段階後に閉じるというものである(図 29.1 参照).

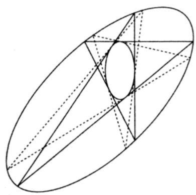


図 29.1　ポンスレの閉包定理

ポンスレのポリズム[*1]は射影幾何学の古典的な結果である．それがジャン-ヴィクトール・ポンスレによって発見されたのは，彼がサラトフというロシアの都市における 1813–1814 年のナポレオン戦争の際に捕虜になっていたときのことであり，1822 年に彼の『図形の射影的性質についての論文(Traité sur les propriétés projectives des figures)』の中で発表された.

[*1] [原註]実際問題としては，ギリシャ語のポリズム(porism)は定理(theorem)を意味している．ユークリッドには「ポリズム」という失われた書物がある.

次のようにすると，自分流の閉包定理を作ることができる．パラメータづけされた卵形線 $\Gamma(t)$ から始める．ここで，t は 0 から 1 まで変わる．定数 c を選び，弦 $\Gamma(t)\Gamma(t+c)$ の 1 パラメータ族を考える．これらの弦は包絡線 γ を持つ．この包絡線にはカスプがあるかもしれない(が，変曲点はない(第 1 巻第 8 講参照))．c が十分小さければ曲線 γ は常に滑らかだが，いま γ は滑らかであると仮定する．そうすれば，閉包定理が成り立つような，入れ子の卵形線の対 Γ と γ が得られている．

実際，対応 $X \mapsto Y$ は，パラメータ t を使って，$t \mapsto t+c$ という式で与えられる．n 回の繰り返しで点が元の点に戻るのは，nc が整数であるとき，かつそのときに限る．この条件は c だけに依存する，つまり卵形線の対だけに依存し，出発点 X の選び方によらない．これから閉包定理が得られる．

そのとき問題は，「入れ子の楕円の対が与えられたとき，対応 $T : X \mapsto Y$ が $t \mapsto t+c$ という式で与えられるように，外側の楕円上のパラメータ t をどのように選べばよいか？」となる．

29.2　閉包定理の証明

▶ まず最初に，平面を引っぱって Γ が円周になるようにする(専門的な言い方では，この引っぱりをアフィン変換と呼んでいる)．ポンスレの定理は直線だけに関するものだから(つまり，距離と角には無関係だから)，直線を直線に写すような平面の変換(そのような変換は射影変換と呼ばれる)を施しても，定理が成り立たなくなることはない．円周 Γ を弧長のパラメータ x で考える．

点 x から曲線 γ への右と左の接線分の長さをそれぞれ $R_\gamma(x)$ と $L_\gamma(x)$ と書く(図 29.2 参照)．x に無限小の近さにある点 x_1 を考える．O を，直線 xy と x_1y_1 との交点とし，ε をこの直線の間の角とする．あらゆる直線と同じように，直線 x_1y_1 は両端で円周 Γ と同じ角をなす．この角を α と書く(図 29.3 参照)．

この後は，本質的には I. ニュートンの『プリンキピア』[55]の定理 XXX，図 102 の議論と同じである．また，第 30 講を参照のこと．

正弦定理により[*2]

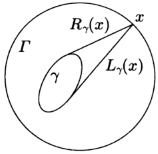


図 29.2 左と右の接線分

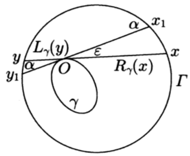


図 29.3 弧長の歪曲

$$\frac{|yy_1|}{L_\gamma(y)} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\alpha} = \frac{|xx_1|}{R_\gamma(x)}$$

つまり

$$\frac{dy}{L_\gamma(y)} = \frac{dx}{R_\gamma(x)} \tag{29.1}$$

となる．

しばらくの間，γ も円周であると仮定する．そのとき，左右の接線分の長さは等しく，$R_\gamma(x)=L_\gamma(x)$ となる．この共通の値を $D_\gamma(x)$ と書く．(29.1)から，線素 $dx/D_\gamma(x)$ は変換 T の下で不変である．後は，この線素が dt となるようにパラメータ t を選ぶことである．これには積分して

$$t = \int \frac{dx}{D_\gamma(x)}$$

とすればよく，そのとき変換 T はずらし変換 $t \mapsto t+c$ になる．

最後に，γ が円周でないときは，γ を円周にするような平面の引き伸ばしを考え，A と書く．アフィン変換は平行な線分の比を変えない．(29.1)を考えに

---

*2 [訳註] x_1 と x の間が無限小なので，高次の無限小の誤差を無視すると，弧 x_1x と y_1y は弦とみなせ，直線 x_1y_1 が γ となす角も α と考えられる．そこで，三角形 Oyy_1 と Oxx_1 を考えて，正弦定理を使う．

入れると,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{R_\gamma(x)}{L_\gamma(y)} = \frac{R_{A\gamma}(Ax)}{L_{A\gamma}(Ay)} = \frac{D_{A\gamma}(Ax)}{D_{A\gamma}(Ay)}$$

となる．またしても，変換 T の下で不変な線素 $dx/D_{A\gamma}(Ax)$ が得られる．前と同じように，$T(t)=t+c$ となるようにパラメータ t を選べば，ポンスレの定理が導かれる．◀

注意 29.1　楕円内部のビリヤードの完全積分可能性からポンスレのポリズムを導くことができる．共焦点の楕円の対に対する閉包定理となっている系 28.5 を参照のこと．また，演習問題 29.1 を参照．

29.3　分岐

円錐曲線はその 5 つの点によって定まる．円錐曲線の束(そく)は，4 つの固定された点を通る円錐曲線の 1 パラメータ族である．この 4 点は複素点でもよいが，そのときは実平面では「見えない」点になる．代数的に，$P(x,y)=0$ と $Q(x,y)=0$ を 2 つの円錐曲線の 2 次方程式とすると，これらの円錐曲線は，方程式 $P(x,y)+tQ(x,y)=0$ で与えられる束を定める*3．ここで，t はパラメータである*4．

束の代数的定義は，4 点のいくつかが一致したり，無限遠点にあるような場合を除外しない．たとえば，同心円周族も束である．実際，円錐曲線が円周であるのは，それが無限遠にある非常に特殊な 2 つの「円周」点，$(1:i:0)$ と $(-1:i:0)$ を通るとき，かつそのときに限る*5．同心円周は，これらの点ですべて互いに接しており*6，だからこの場合，4 つの点が 2 つの「2 重点」に合

*3 [訳註] $P(x,y)=0$ と $Q(x,y)=0$ を同時に満たす点(2 つの円錐曲線の交点)は，どんな t に対しても円錐曲線 $P(x,y)+tQ(x,y)=0$ の点になる．

*4 [原註] 第 28 講では，この束のことを「円錐曲線の線形族」と呼んでいる．

*5 [訳註] $(\pm 1:i:0)$ は複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ の点と考えている．本書では第 8 講と第 10 講(第 2 巻)で実射影平面 $\mathbb{RP}^2$ を考えたが，そこでの座標 $(x:y:z)$ が複素数の範囲を動くと考える．
一般の 2 次曲線 $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ を射影座標 $(x:y:z)$ で考えると，$ax^2+by^2+cxy+dxz+eyz+fz^2=0$ となり，無限遠直線 $z=0$(実際には $\mathbb{C}$ で，実 2 次元だが)との交わりは $ax^2+by^2+cxy=0$ となり，これに $(\pm 1:i:0)$ が属することは $a-b+ci=0 \Leftrightarrow a=b,\ c=0$ と言い換えられ，これはまた 2 次曲線が円となる条件と同値である．

流している．

同じ束に属する，入れ子になった円錐曲線 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k, \Gamma$ を考える．ここで，Γ は一番外側の円錐曲線である．ゲームを少し変えよう．Γ 上の点 X を選び，γ_1 への接線を再び Y で Γ にぶつかるまで描く．Y から γ_2 に接線を描き，… などとして，γ_k への接線が Z で Γ にぶつかるまで描く(図 29.4 参照)．対応 $X \mapsto Z$ は同じ性質を持つ．もしこの n 回の繰り返しで点 X がそれ自身に写されるなら，ほかのあらゆる点もまた n 回の後に戻ってくる．これはポンスレのポリズムの一般化である(射影的に双対という，別の一般化は系 28.6 で与えられる)．

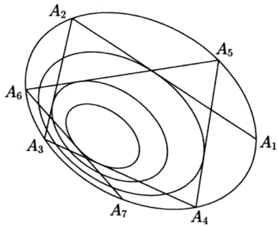


図 29.4 一般化されたポンスレの定理，またはポンスレの「大」定理

2 つの入れ子になった楕円 γ と Γ が与えられたとき，内接・外接のポンスレの折れ線が n 回後に閉じるかどうかを決定したい．もし両方の円錐曲線が円周であって(同心でなくてもよい)，$n=3,4$ のときの具体的な解答は，ポンスレの定理が発見される前に知られていた．演習問題 29.2 を参照のこと．

一般的な解答はケイリーによって発見された([38]参照)．外側の円錐曲線が単位円周で，内側の円錐曲線が中心が同じ楕円 $a^2x^2+b^2y^2=1$ であるという特殊な場合に，この解答を(証明することなく)述べておこう．テイラー級数

$$\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(1+t)} = c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots$$

---

*6 [訳註]中心が (a,b) の円の方程式は $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ であり，点 (x_0,y_0) における接線は $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=0$ となる．$\mathbb{CP}^2$ では円の方程式は $(x-az)^2+(y-bz)^2=(rz)^2$ となり，点 $(x_0:y_0:z_0)$ における接線は $(x-az)(x_0-az_0)+(y-bz)(y_0-bz_0)=zz_0$ となる．$(\pm1:i:0)$ における接線は $\pm(x-az)+i(y-bz)=0$ となり，円の中心によって定まる．

を考える．ここで，それぞれの c_i は a と b の関数である（たとえば，$c_0=ab$）．ポンスレの折れ線が n 回後に閉じるための必要十分条件は，$n=2m+1$ に対しては

$$\begin{vmatrix} c_2 & \cdots & c_{m+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m+1} & \cdots & c_{2m} \end{vmatrix} = 0$$

であり，$n=2m$ に対しては

$$\begin{vmatrix} c_3 & \cdots & c_{m+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m+1} & \cdots & c_{2m} \end{vmatrix} = 0$$

である．

29.4　ポンスレのグリッド

γ と Γ を2つの入れ子の楕円とする．最近，R. シュワルツはポンスレの多角形，すなわち，Γ に内接し γ に外接する多角形の面白い性質を発見した[70]．

$L_1, \cdots, L_n$ を多角形の辺を含む直線で，γ との接点の周期的な順序で並べたものとする．これらの直線の交点 $A_{ij}=L_i \cap L_j$ を考える．A_{ii} は L_i と γ との接点と仮定しよう．また，n が奇数であると仮定する（n が偶数のときの定式化は少し違っている）．

点 A_{ij} は，**ポンスレのグリッド**と呼ばれる有限集合を構成する．このグリッドを2つの方法で部分集合に分解しよう．各 $j=0, 1, \cdots, n-1$ に対し，「円周的」集合 P_j は点 $A_{i,i+j}$ からなるものとし（もちろん，$n+1=1$ などのように，添え字は循環するものと考える），「半径的」集合 Q_j は点 $A_{j-i,j+i}$ からなるものとする．$P_j=P_{n-j}$ であるから，円周的集合 P_j は $(n+1)/2$ 個あり，それぞれは n 個の点を含む．半径的集合 Q_j は n 個あり，それぞれは $(n+1)/2$ 個の点を含む．図29.5には，$n=7$ の場合のこの様子がすべて描かれている．

シュワルツの定理に従えば，円周的集合 P_j はそれぞれある楕円，たとえば

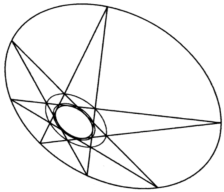


図 29.5 ポンスレのグリッド

γ_j の上にあり[*7]，集合 P_j は γ_i に内接し γ に外接するポンスレ多角形の頂点からなる．同じように，半径的集合 Q_j はそれぞれある双曲線上にある．その上，すべての円周的集合は射影的に同値である．つまり，すべての j, j' に対し，P_j を $P_{j'}$ に写す射影変換がある．半径的集合 Q_j に対しても，同じ射影同値が成り立つ．

偶数の n に対しても類似の結果が成り立つ．R. シュワルツは複素代数幾何学を使って彼の定理を証明した．また，楕円内部のビリヤードの性質を使って，シュワルツの定理を導くことも可能である([52]参照)．

29.5 マネー=クーツの定理

ポンスレのポリズムに似た閉包定理は，他にも数多くある．その1つが，2つの与えられた円周に接する円周の鎖に関するシュタイナーの定理である(図29.6参照)．その主張は，もしそのような鎖が，ある点から始めて n 段階の後で閉じるのなら，他のどの点から始めても同じことが起こる，というものである．シュタイナーの定理は，適当な幾何的変換を適用すると明らかなものに変わる．γ と Γ を同心円周に写す反転が存在するからである(しかしながら，ポンスレのポリズムにはそのような証明はないこと，したがってそれがずっと難しい結果であることを注意しておく)．

他にも，多角形に内接し，互いに接する円周に関する不思議な定理がある．いちばん簡単なものはつぎのようなものである．三角形 $A_1A_2A_3$ を考える．

---

*7 [原註]この主張はダルブー[19]によって知られている．

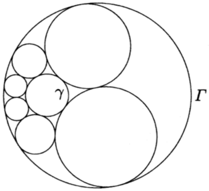


図 29.6　シュタイナーの定理

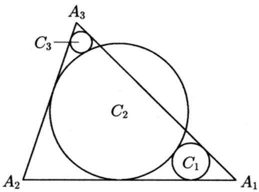


図 29.7　三角形の中に次々と円周を内接させる

円周 C_1 を角 $A_3A_1A_2$ に内接させ，それから円周 C_2 を角 $A_1A_2A_3$ に内接させて C_1 と接するようにする．それから円周 C_3 を角 $A_2A_3A_1$ に内接させ，C_3 に接するようにする．これを循環的に繰り返していく(図 29.7 参照)．

定理 29.1　この円周の列は 6 周期的である．つまり，$C_7=C_1$ となる．図 29.8 参照．

証明▶ 奇跡かと思えるほど鮮やかな変数変換を使った証明がある．

三角形の角を $2\alpha_1, 2\alpha_2, 2\alpha_3$ とする．最初の 2 つの円周を考え，r_1 と r_2 をその半径とすると，等式

$$r_1 \cot \alpha_1 + 2\sqrt{r_1 r_2} + r_2 \cot \alpha_2 = |A_1A_2| \tag{29.2}$$

が成り立つ．実際，図 29.9 で，

$$|A_1P_1| = r_1 \cot \alpha_1, \quad |A_2P_2| = r_2 \cot \alpha_2, \quad |P_1P_2| = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

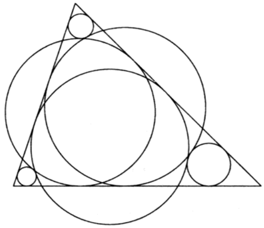


図 29.8 手続きの周期が 6 であること

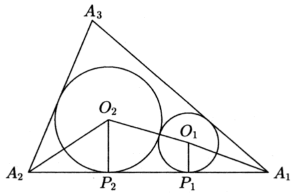


図 29.9 2 つの内接円周の関係

となっている[*8].

$r_1 \cot\alpha_1 = u_1^2$, $r_2 \cot\alpha_2 = u_2^2$, $\sqrt{\tan\alpha_1 \tan\alpha_2} = e$ とおくと，等式(29.2)は

(29.3)
$$u_1^2 + 2eu_1u_2 + u_2^2 = |A_1A_2|$$

と書き直すことができる．等式(29.3)から

(29.4)
$$u_1 + eu_2 = \sqrt{|A_1A_2| - (1-e^2)u_2^2}, \quad u_2 + eu_1 = \sqrt{|A_1A_2| - (1-e^2)u_1^2}$$

が得られる．(29.3)を

$$u_1(u_1+eu_2) + u_2(u_2+eu_1) = |A_1A_2|$$

と書き直して，(29.4)を使うと

*8 [訳註]3 番目の式は $(r_1+r_2)^2 = |P_1P_2|^2 + (r_2-r_1)^2$ から得られる．

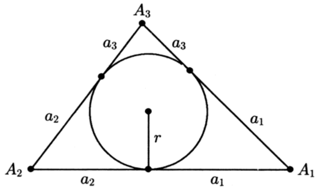


図 29.10　周期が 6 であることの証明

(29.5)

$$u_1\sqrt{|A_1A_2|-(1-e^2)u_2^2}+u_2\sqrt{|A_1A_2|-(1-e^2)u_1^2}=|A_1A_2|$$

となる．

三角形の内接円を考え，r をその半径，a_1, a_2, a_3 を三角形の頂点から内接円への接線分の長さとする(図 29.10 参照)．$p=a_1+a_2+a_3$ を周の長さの半分，S を面積とする．一方で，$S=rp$ であり，他方，ヘロンの公式から $S=\sqrt{pa_1a_2a_3}$ である．したがって，$r^2=a_1a_2a_3/p$ である．

e を求めよう．$\tan\alpha_1=r/a_1$，$\tan\alpha_2=r/a_2$ なのだから，

$$e^2=\frac{r^2}{a_1a_2}=\frac{a_3}{p}$$

となる．特に，$e<1$ である．これからまた，

$$1-e^2=\frac{p-a_3}{p}=\frac{|A_1A_2|}{p}$$

が得られる．今度は等式(29.5)を

(29.6)
$$\frac{u_1}{\sqrt{p}}\sqrt{1-\frac{u_2^2}{p}}+\frac{u_2}{\sqrt{p}}\sqrt{1-\frac{u_1^2}{p}}=\sqrt{\frac{|A_1A_2|}{p}}$$

と書き直す．この等式を見ていると，すぐに最後の置き換え

$$\frac{u_1}{\sqrt{p}}=\sin\phi_1,\quad \frac{u_2}{\sqrt{p}}=\sin\phi_2$$

を思いつくことになる．すると，(29.6)式は最終的に

$$\sin(\phi_1+\phi_2) = \sqrt{\frac{|A_1A_2|}{p}}$$

と，つまり

$$\phi_1+\phi_2 = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{|A_1A_2|}{p}}\right) := \beta_3 \tag{29.7}$$

と書き直される(最後の等式で導入する記号 β の方が便利なのである).

ここで一息入れて，何ができたかを振り返ってみることにしよう．初めに，三角形の 2 つの角に内接する円周をその半径 r_1 と r_2 で特徴づけ，円周が接するという条件は複雑な等式(29.2)になった．それから変数を ϕ_1 と ϕ_2 にまで変えると，接するという条件は簡単な(29.7)式になった．

角 $A_2A_3A_1$ に内接する第 3 の円周を導入する．それは半径 r_3 と変数 ϕ_3 によって特徴づけられる．この ϕ_3 と r_3 との関係は，ϕ_1, ϕ_2 と r_1, r_2 との関係と同じである．

さて，最後の仕上げである．最初の 7 つの円周に対しては

$$\phi_1+\phi_2 = \beta_3, \quad \phi_2+\phi_3 = \beta_1, \quad \phi_3+\phi_4 = \beta_2,$$
$$\phi_4+\phi_5 = \beta_3, \quad \phi_5+\phi_6 = \beta_2, \quad \phi_6+\phi_7 = \beta_1$$

となる．最初の等式から第 2 の等式を引き，それに第 3 の等式を足し，第 4 の等式を引き，などとしていくと，その結果は $\phi_1-\phi_7=0$ となる．すなわち，7 番目の円周は 1 番目の円周と一致する．◀

定理 29.1 は，初等幾何のマルファッティの問題と密接に関係している．この問題は，三角形の 3 つの角に内接し，互いに接する 3 つの円周を作図するというものである．問題は 1803 年に G. マルファッティによって解かれたが，シュタイナー，プリュッカー，ケイリーといった 19 世紀の優れた幾何学者たちが興味を持つようになった．マルファッティの問題の解は上の公式から容易に導かれる．マルファッティの円に対しては $\phi_4=\phi_1$，$\phi_5=\phi_2$，$\phi_6=\phi_3$ であり，

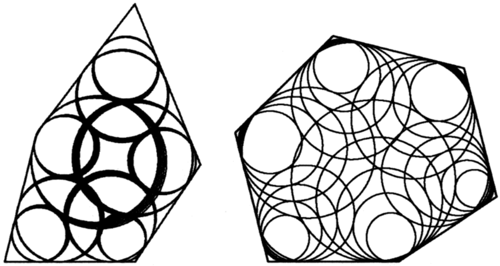


図 29.11　一般の多角形に対して周期性がないこと

$$\phi_1 = \frac{\beta_3+\beta_2-\beta_1}{2}, \quad \phi_2 = \frac{\beta_1+\beta_3-\beta_2}{2}, \quad \phi_3 = \frac{\beta_2+\beta_1-\beta_3}{2}$$

となって，これが円を一意的に定める．

驚くべきことだが，定理 29.1 の主張は，直線でできた三角形を円弧でできた三角形に置き換えても成り立つのである！　このことはアマチュア数学者である G. B. マニー-クーツと C. J. エヴリンにより，注意深く図を描くことによって発見され*9，1971 年にティレルとパウエルによって証明された([86] 参照)．その証明は定理 29.1 の証明に似ているが，三角関数の役割を果たすのが(より複雑な)楕円関数になるのである．ついでながら，楕円の中のビリヤード写像に対する不変関数は楕円関数でも表すことができる．

他の多角形ではどうだろうか？　ゲームのルールは，連続した角に次々と円を内接させ，各円周を 1 つ前の円周と接するようにすることとする．図 29.11 には一般の 5 角形と 6 角形の場合が描かれている．ここで見て取れるのは，内接円にはどんな周期性もないだろうということである．一般の 4 辺形に対しては，円周の挙動は極めてカオス的である[84]．

しかしながら，n 角形が図 29.12 に描かれているような特殊な条件を満たせば，周期性は回復する．$n \geqq 5$ と仮定する．多角形の頂点を $A_1, A_2, \cdots$ とし，内角を $2\alpha_1, 2\alpha_2, \cdots$ とする．すべての i に対して，$\alpha_i+\alpha_{i+1}>\pi/2$ であると仮定する．直線 $A_{i-1}A_i$ と $A_{i+1}A_{i+2}$ の交点を D_i と書く．三角形 $A_{i-1}A_iD_{i-1}$

*9 [原註]パソコンの時代はまだ到来していなかった．

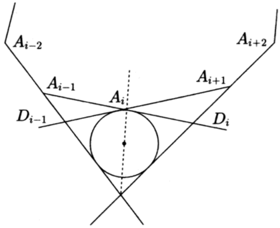


図 29.12　周期性が回復する条件

と $A_iA_{i+1}D_i$ の傍接円で，それぞれ辺 A_iD_{i-1} と A_iD_i に接するものを考える．これら 2 つの傍接円が一致するというのがその条件である．

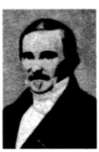
そのとき，奇数の n に対して内接円の列は周期的で，周期は $2n$ である．n が偶数のときは，

$$\frac{\displaystyle\prod_{i=1,\ i:\text{奇数}}^{n}\left(\sqrt{1-\cot\alpha_i\cot\alpha_{i+1}}+1\right)}{\displaystyle\prod_{i=2,\ i:\text{偶数}}^{n}\left(\sqrt{1-\cot\alpha_i\cot\alpha_{i+1}}+1\right)}=1$$

という条件を追加する必要があるが，この条件が満たされれば内接円の列は周期的で，周期は n である．

この結果は定理 29.1 と似たやり方で証明され，定理 29.1 と同じように，円弧で作られた多角形に拡張することができる([81]参照)．ポンスレのポリズムと，その歴史や一般化についてこれ以上のことは[5], [10]を参照のこと．

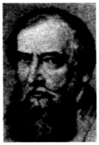
本講の数学を開拓した人びと



ジャン-ヴィクトール・ポンスレ (1788-1867)
工兵将校としてナポレオンのモスクワ遠征に参加し捕虜となる．獄中で本もなく記憶だけで幾何の再構成をしようとしたが，数学の細部は頭から蒸発して，基本的な原理だけが残っていた．円錐曲線の射影で不変な性質を追究する思索によって，(複素)射影幾何学を作り出す．



リチャード・シュワルツ (1966年生まれ)
プリンストン大学から，サーストンの指導で，「ある無限生成ショットキー群の極限集合について」によりPh.D.を取得．メリーランド大学カレッジパーク校教授，ブラウン大学教授を務め，トポロジー，デーン手術，ビリヤードなどを研究．



ヤコブ・シュタイナー (1796-1863)
14歳になるまで読み書きを習わず，両親の反対を押し切って18歳で学校教育を受ける．ハイデルベルク大学とベルリン大学で学ぶ．射影幾何の発展に貢献した(シュタイナーの定理，シュタイナー曲面，シュタイナーのローマン曲面)．代数と解析が嫌いだったという．

演習問題

29.1 任意の入れ子の楕円の対は射影変換によって共焦点の楕円に写すことができることを示せ．ポンスレのポリズムを系28.5から導け．

29.2 Γ と γ を半径 R と r の円周とし，a を円の中心の間の距離とする．γ が Γ の内部にあると仮定する．

(a) Γ に内接し γ に外接する三角形が存在するのは，$a^2=R^2-2rR$(チャップルの公式)が成り立つとき，かつそのときに限ることを証明せよ．

(b) Γ に内接し γ に外接する4辺形が存在するのは，$(R^2-a^2)^2=2r^2(R^2+a^2)$(フスの公式)が成り立つとき，かつそのときに限ることを証明せよ．

29.3 (a) 図29.6に図示してあるシュタイナーの定理を証明せよ．

(b) Γ と γ に接する円周の中心が，Γ と γ の中心を焦点とする楕円上にあることを示せ．

29.4* 直線の一般な3つ組 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 が与えられたとき，円周の3つ組 C_1, C_2, C_3 で，あらゆる2円が互いに外接し，C_1 が ℓ_2 と ℓ_3 に接し，C_2 が ℓ_3 と

ℓ_1 に接し，C_3 が ℓ_1 と ℓ_2 に接するようなものがいくつあるか？

29.5 元々のマルファッティの問題は，与えられた三角形の中に重なり合わない3つの円を内接させ，面積の和を最大にするようにせよというものであった．マルファッティは，この最大値が，各円周が他の2つの円周に接するときに達せられると仮定した．この仮定が間違っていることを証明せよ．

[ヒント]正三角形を考えよ．

コメント．この極値問題の完全な解法は1992年というごく最近になって公表された[92]．

第30講 楕円体の重力的引力

この最後の講義では，読者に，常識に加えて，物理学の基礎的な知識を仮定して，物理学の言葉を自由に使うことにする．たとえば，関数が力の場の**ポテンシャル**と呼ばれるのは，力のベクトルがこの関数の勾配であるときである．**等ポテンシャル面**とはポテンシャル関数のレベル曲面であるなどである．言うまでもないことだが，引力は質量に比例し，物体の間の距離の2乗に反比例する．電荷のクーロン引力と斥力も同様である．

30.1 空洞に重力はない

数理解析の創造者の一人であるI. ニュートンは幾何学的な議論の巨匠であった．彼の主著『自然哲学の数学的原理(フィロソフィアエ・ナチュラリス・プリンキピア・マテマチカ *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*)』には幾何的図形が満載であり，数式は皆無と言っていいほどに排除されている．『プリンキピア』第12節「球状物体の引力」の定理30(命題70)は次のように述べられている．

「球面の離れた点のそれぞれに向かって，点からの距離の平方に反比例して減少する，等しい求心力が働いていれば，曲面の内部に置かれた微粒子はこの力によってどの方向にも引っぱられないと，私は主張する．」

言い換えれば，一様な球面(限りなく薄い球状殻と言う方がいいかもしれないが)の内部には重力はない．

ニュートンの証明は(少し修正すると)次のようになる(第29講を参照)．Pを球面の内部の点とする．Pを頂点とする無限小の円錐を考える．球面と円錐との交わりは2つの無限小の領域AとBからなる(図30.1参照)．この2つの領域によって点Pに働く引力が互いに打ち消し合うことを示そう．

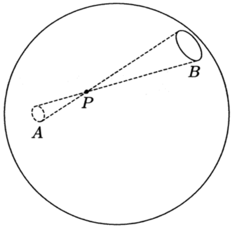


図 30.1　点 P での引力は互いに打ち消し合う

点 P から領域 A と B への引力は質量，つまりその面積に比例し，P との距離の 2 乗に反比例する．円錐の軸は球面と同じ角をなす．したがって，P を共通の頂点とする 2 つの無限小円錐は相似で，その底面の面積と P との距離の 2 乗との比は等しい．それゆえ，P での引力は等しく，方向は反対である．もう一度ニュートンを引用すると

「したがって，物体 P はこれらの引力によってどの方向にも引っぱられることはない．Q.E.D.」

2 つの注意をしておこう．1 つは，同じ議論によって，どんな幅の球面殻[*1]の内部でも重力がないことが証明されることである．球面殻は無限に薄い殻の集まりであり，それぞれに対する重力は消えている．もう 1 つは，クーロン力も逆 2 乗の法則に従っているから，一様に荷電された球面の内側の電気力もまた消えることである．

30.2　球面の外での重力

次に，ニュートンは等質な球面の外側の引力を考える．定理 31（命題 71）は次のように述べられる．

「命題 70 で仮定されたのと同じ条件の下で，球面の外部に置かれた微粒子は，球面の中心からの距離の 2 乗に反比例する力によって，同じ中心に引っ

[*1] ［訳註］球面殻とは 2 つの同心球の間の領域のことで，無限に薄いというのは，半径の差 $R-r$（球殻の幅と呼ぼう）が無限小であることを意味している．30.4 節に出てくる「有限的に薄い」とは，この幅が有限の値であることを意味している．ホメオイドの幅も同様に考える．

ぱられると，私は主張する.」

すなわち，一様な球面は，中心に置かれた全質量に等しい質点と同じ引力を持つ.

この場合もニュートンの証明は幾何学的だが，かなり入り組んでいる．ここではそれとは違って，より平明でより概念的な議論を与えることにしよう.

原点 O に吸い込み口のある非圧縮性流体の運動を考える．流線は半径方向の向きを持ち，O を中心とするどんな球面を通る単位時間あたりの流量も同じである．半径 r の球面の曲面積は $4\pi r^2$ である．それゆえ，流体の速さは原点からの距離の関数として r^{-2} に比例する．吸い込み口に向かう球面対称な非圧縮性流体の速度場は質点の重力場と同じである，という結論が得られる.

どんな質量分布を持つ重力場も，個々の質量によって働く力の和である．このことから，どんな質量分布の重力場も同じ非圧縮性を持つことになり，質量を含まないどんな領域の境界を通る流量も 0 になる*2.

点 O を中心とする一様な球面の重力に戻ろう．球面対称性のために，試験点 P における力は距離 PO だけに依存し，半径方向を持つ．さらに，この力の場は非圧縮性を持つ．非圧縮性の球面対称な半径場*3は，O に置かれた質点の重力場だけである．この点の質量が球面の全質量に等しいことを見るには，O を中心とする十分大きな球面を通る 2 つの場の流量を比較すれば十分である.

ニュートンの定理 30 と定理 31 の結果は両方とも，距離 r にある点の引力が r^{1-n} に比例するとの条件の下で，どんな次元 n の空間でも成り立つ.

30.3 電荷の自由分布

閉じた伝導面上に荷電流体を落とすと，荷電は曲面上に自由に分布する．たとえば，球面に対して，この自由な荷電分布は一様である.

---

*2 [原註]言い換えれば，場には発散がない.

*3 [訳註]これも物理学の言葉は断らずに使うと言っているので定義はしていないが，意味を推測するのが難しくない言葉に対して著者たちはこのような態度をとっている．物理的な言葉遣いや議論の仕方に多少は慣れてほしいという意味があるのかもしれず，アーノルドの学問世界の雰囲気を味わってほしいと思っているのかもしれない．もちろん，ここで述べられていることは数学的に厳密な言葉遣いで言い直すことができるが，軽快さは失われる.

自由な荷電分布には2つの性質がある．1つは，曲面上ではポテンシャルは定数である．これは明らかである．2点におけるポテンシャルの差は荷電流体を1点からもう1点の方に動かすからである．

もう1つは，曲面の内部の電気力が0であることである．言い換えると，ポテンシャルは一定である．実際，ポテンシャルは一定でないと仮定すると，境界の曲面上では一定なので，内部の点で最小値か最大値かを取る．その点をPとする．Pの周りの小さい等ポテンシャル面を考える．そのとき，電気力はこの曲面を入るか出るかするが，それは力場（りきば）が非圧縮性であることに矛盾する．

この議論は，一様な球面の内部で重力がなくなるというニュートンの定理の別証を与える．もちろんここでは物理の常識を信頼してのことである(たとえば，荷電の自由分布が一意的に存在することは数学的には複雑な問題である！)．

30.4　ホメオイド

ホメオイドとは，中心が共通な2つの相似な楕円面の間の領域である．

定理 30.1　無限に薄いホメオイドの内部の重力は0である．

証明▶ 最初に，無限に薄い球面殻を考える．30.1節で，試験点Pにおける引力が0であることが分かっている(図30.2参照)．Pを頂点とする無限小円錐と球面殻との交わりの体積をvとVと書き，円錐の軸に沿ったPから球面への距離をrとRと書く．引力が0なので，$v/r^2=V/R^2$である．

ホメオイドは球面殻からアフィン変換によって得られる．この変換は，3つの互いに直交する方向への，拡大率の異なる引き伸ばしである(図30.2参照)．対応する体積と距離をv', V', r', R'と書く．アフィン変換は体積の比と同一直線上の線分の比を保つので，$V'/v'=V/v$, $R'/r'=R/r$となり，$v'/(r')^2=V'/(R')^2$が得られ，つまり，点P'での引力は互いに打ち消し合う．◀

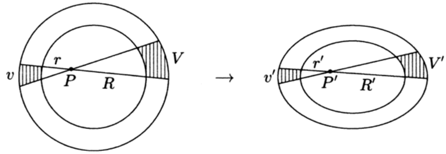


図 30.2 ホメオイドの内側の引力は 0 である

こうして，無限に薄いホメオイドの内部のポテンシャルは一定である（それゆえ，有限的に薄いホメオイドの内部のポテンシャルも一定である*4）．楕円面上の荷電分布で，その密度が無限に薄いホメオイドの幅に比例するものを考える．この分布に対しては，楕円面の内部とその上のポテンシャルは一定であるので，荷電の自由分布である．

30.5 アーノルドの定理

n 次多項式によって $f(x,y,z){=}0$ として与えられた滑らかな閉曲面 M を考える．たとえば，

$$ax^4{+}by^4{+}cz^4 = 1$$

は 4 次曲面の方程式である．点 P が曲面 M に関して**内部の**点であるとは，P を通るあらゆる直線と M との交点がちょうど n 個であるときに言う（もちろん，交点の数は n を超えない）．図 30.3 には 2 本の 4 次曲線が描かれている．1 本目の曲線の内点は一番内側の卵形線の内側にあり，2 本目の曲線はまったく内点を持たない．

曲面 M 上の荷電分布で，その密度が M と曲面 $M_\varepsilon{=}\{f(x,y,z){=}\varepsilon\}$ の間の無限小の殻の幅に比例するものを考える．これは，30.4 節で述べたホメオイド密度の一般化である．P を内点とする．荷電の符号は次のように交代する．P に最も近い M の成分上では正で，次の成分では負で，その次では正で，などである．

---

*4 ［訳註］30.1 節の最後の注意と同じ．

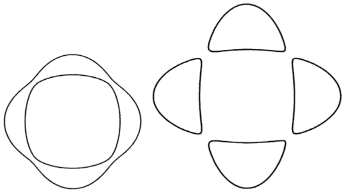


図 30.3　2 つの 4 次曲線．左は内点を持ち，右は内点を持たない

定理 30.2　M によって点 P に働く引力は 0 である．

証明▶ 前と同じように，頂点 P と軸 ℓ を持つ無限小円錐を考える．M と M_ε の間の殻とこの円錐との交わりは n 個の領域からなり，その点 P での引力が相殺されることを証明する．

この n 個の領域の 1 つを考え，Q をそこに含まれる点とする．h をこの領域の内部にある ℓ の(無限小)線分の長さとし，$r=PQ$ とする(図 30.4 参照*5)．この領域の体積は，円錐の点 Q での垂直な断面の面積の h 倍である．その面積は r^2 に比例する．したがって，その領域が P に働く引力は $r^2h/r^2=h$ に比例する．こうして，直線 ℓ の M と M_ε の間の(無限小)線分の符号付きの長さの和が 0 になることを証明する必要がある．

この主張は 1 次元的な主張である．周りの空間のことは忘れてもよく，多項式 f を直線 ℓ に制限することができる．得られるのは 1 変数の多項式 $f(x)$ である．

h を f の言葉で表そう．図 30.5 を考える．$f(q)=0$, $f(q+h)=\varepsilon$ である．$f(q+h)=f(q)+hf'(q)$ (h^2 以上のオーダーの項を無視している)であるから，$h=\varepsilon/|f'(q)|$ となる*6．しかし，符号を正しく考えて，足していく必要がある．符号を考えに入れると，証明する必要があるのは恒等式

---

*5 [訳註]円錐も無限小円錐であり，殻の幅も無限小なので，この領域のどの点を Q としても諸量は無限小しか変わらず，領域自体を Q という名前で読んでも問題は起こらない．

*6 [訳註]ここで，Q は ℓ にあって，q はその ℓ の座標と考えている．

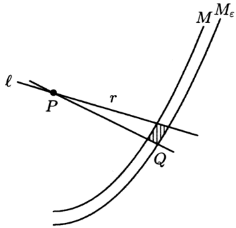


図 30.4 領域 Q によって点 P に働く力を計算する

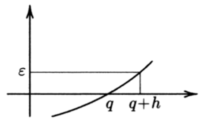


図 30.5 無限小の殻の幅を計算するために

$$\frac{1}{f'(q_1)}+\frac{1}{f'(q_2)}+\cdots+\frac{1}{f'(q_n)}=0 \tag{30.1}$$

であることを示そう．ここで，和は n 次多項式のすべての根にわたって取られる．

実際，連続する根での導関数の符号は交代的であり（図 30.6 参照），荷電の符号も交代的であった．$q_1<\cdots<q_k$ を点 P の左にある根で，$q_{k+1}<\cdots<q_n$ を P の右にある根とする．さて，$f'(q_{k+1})>0$ であると仮定しよう*7．そのとき，点 $q_{k+1},\cdots,q_n$ から働く（正の）引力の総和は $1/f'(q_{k+1})+\cdots+1/f'(q_n)$ となる．同じように，$f'(q_k)<0$ なので，点 $q_1,\cdots,q_k$ から働く（負の）引力の総和は $1/f'(q_1)+\cdots+1/f'(q_k)$ である．この 2 つを足すと（30.1）になる．

恒等式（30.1）を証明しよう．f のすべての根は実であり，$f(x)=(x-q_1)\cdots(x-q_n)$ となっていた．これから

$$f'(x)=(x-q_2)\cdots(x-q_n)+(x-q_1)(x-q_3)\cdots(x-q_n)$$
$$+\cdots+(x-q_1)(x-q_2)\cdots(x-q_{n-1})$$

*7 ［訳註］もちろん $f'(q_{k+1})<0$ であると仮定してもよいが，符号が反対になるだけで以下の議論は同じようにできる．

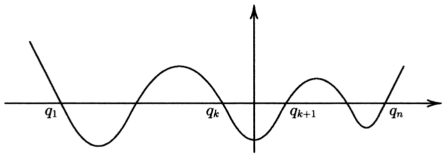


図 30.6　符号のあり方

が得られ，それゆえ $f'(q_i)=(q_i-q_1)(q_i-q_2)\cdots(q_i-q_n)$ となる(もちろん，q_i-q_i の項は省略されている)．そのとき，(30.1)は恒等式

$$\frac{1}{(q_1-q_2)(q_1-q_3)\cdots(q_1-q_n)}+\frac{1}{(q_2-q_1)(q_2-q_3)\cdots+(q_2-q_n)}+\cdots+\frac{1}{(q_n-q_1)\cdots(q_n-q_{n-1})}=0 \tag{30.2}$$

と同値である．

後は(30.2)を証明すればよい．$n-1$ 次の多項式

$$g(x)=\frac{(x-q_2)(x-q_3)\cdots(x-q_n)}{(q_1-q_2)(q_1-q_3)\cdots(q_1-q_n)}+\frac{(x-q_1)(x-q_3)\cdots(x-q_n)}{(q_2-q_1)(q_2-q_3)\cdots+(q_2-q_n)}+\cdots+\frac{(x-q_1)(x-q_2)\cdots(x-q_{n-1})}{(q_n-q_1)\cdots(q_n-q_{n-1})}$$

を考える．$g(q_1)=g(q_2)=\cdots=g(q_n)=1$ となる．一般に，$n-1$ 次の多項式が n 個の根を持てば，その多項式は恒等的に 0 になる．それゆえ，$g(x)\equiv 1$ となる．特に，$g(x)$ の最高次の項は 0 であり，これがまさに恒等式(30.2)である．◀

30.6　ホメオイドの外での引力：アイヴォリーの定理

前節で等質なホメオイドの内側の引力が 0 であることを証明した．では，外部ではどうであろうか？　答えは 19 世紀の初めにジェイムズ・アイヴォリーによって発見された．

楕円面 M_0

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

は共焦点2次曲面族と呼ばれる2次曲面の1パラメータ族 M_λ

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$$

に含まれる(第28講参照)．パラメータ λ の値によって，楕円面，一葉双曲面，二葉双曲面のどれかになる．

> **定理 30.3** 楕円面上の荷電の自由分布のレベル曲面は，元の楕円面と共焦点の楕円面である．

証明▶ 証明はアイヴォリーによる補題に基づいている．2つの共焦点の楕円面 M_0 と M_λ を考える．後者は前者から，3本の座標軸に沿っての引き伸ばしであるアフィン変換

$$A:(x,y,z)\mapsto(X,Y,Z)=\left(\frac{a'}{a}x,\ \frac{b'}{b}y,\ \frac{c'}{c}z\right) \tag{30.3}$$

によって得られる．ただし，

$$a'=\sqrt{a^2+\lambda},\quad b'=\sqrt{b^2+\lambda},\quad c'=\sqrt{c^2+\lambda}$$

である．この変換で対応する点を (x,y,z) と (X,Y,Z) のように表す．

補題 30.1 P,Q を楕円面 M_0 上の2点，P',Q' を対応する M_λ 上の点とする．そのとき $|PQ'|=|P'Q|$ となる(図30.7参照)．

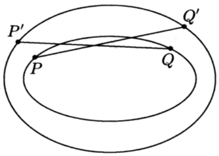


図 30.7 アイヴォリーの補題

補題の証明▶ 証明は計算で行う．$P=(x,y,z)$, $Q=(u,v,w)$ と $P'=(X,Y,Z)$, $Q'=(U,V,W)$ とおく．そのとき，

$$|PQ'|^2 = |P|^2+|Q'|^2-2P\cdot Q', \quad |P'Q|^2 = |P'|^2+|Q|^2-2P'\cdot Q$$

となる．(30.3)から $P\cdot Q'=P'\cdot Q$ であることはすぐに分かる．あとは

$$|P'|^2-|P|^2 = |Q'|^2-|Q|^2$$

を証明すればよい．実際，左辺は

$$\left[\left(\frac{a'}{a}\right)^2-1\right]x^2+\left[\left(\frac{b'}{b}\right)^2-1\right]y^2+\left[\left(\frac{c'}{c}\right)^2-1\right]z^2$$
$$=\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=\lambda$$

となり，同じように右辺も λ となる．◀

さて，アイヴォリーの定理の証明を完成させることにしよう．2 つの体積が等しい，無限に薄い共焦点のホメオイド M_0 と M_λ を考える．P と P' をその上の対応する点の対とする．そのとき，「M_0 によって点 P' に働くポテンシャルは，M_λ によって点 P に働くポテンシャルに等しい」ことがわかる．

実際，Q と Q' を対応する点の対とする．Q での無限小体積と Q' での同じ無限小体積を考える．補題 30.1 により，点 P' でのポテンシャルへの前者の体積の寄与は，点 P でのポテンシャルへの後者の体積の寄与に等しい．このことがすべての点の対 Q, Q' に対して成り立つので，主張が導かれる．

こうして，M_λ のどの点 P' に対して働くポテンシャルも，M_0 の対応する点 P に対して働くポテンシャルに等しい．しかし，一様なホメオイド M_λ の内部のポテンシャルは一定である．したがって，M_λ のあらゆる点に M_0 によって働くポテンシャルは同じである．◀

最後に，2 次曲面の重力に関するニュートンの定理とアイヴォリーの定理には，磁気に関してエレガントな類似があることを指摘しておく（この結果は V. I. アーノルド[4]が発見したものである）．電気伝導性のある一葉双曲面を考え，その無限遠の端点の間に電圧降下があると仮定する．この電圧降下によっ

て，双曲面の経線に沿って電流が誘導される．主張は，「双曲面の内側のこの電流の磁場は0であり，双曲面の外側では磁場はその平行線*8に沿った向きにある」というものである．

本講の数学を開拓した人びと



ヴラジーミル・アーノルド (1937-2010)
28歳でモスクワ大学教授になる．研究テーマは多彩だが，三体問題の安定性(KAM理論)，特異点問題が知られる．アーノルド予想，アーノルドの猫，アーノルド拡散，リウヴィル=アーノルドの定理などがある．第10講(第2巻)も参照．



アイザック・ニュートン (1643-1727)
生まれる前に父が死に，母は再婚し，祖母に育てられる．グラマースクールでの評価は「怠け者で，注意力散漫」．義父の死後，農夫にしようと呼び戻した叔父に才能を見出され，ケンブリッジに入学．当初アリストテレス哲学に拘束されたが，バローに出会い才能が開花する．

演習問題

30.1 $\{x_1, \cdots, x_{n+1}\}$ と $\{a_1, \cdots, a_{n+1}\}$ を異なる実数からなる2つの集合とする．点 x_i で値 a_i を取る次数が n 以下の多項式を作れ．そのような多項式はいくつあるか？

30.2 $f(x)$ を n 次多項式で，n 個の異なる実根 $q_1, \cdots, q_n$ を持つものとする．$k=0, 1, \cdots, n-2$ に対して

*8 [訳註]この平行線は，楕円座標系での経線や緯線のこと．詳しくは[4]付録15の476ページの記述参照．

$$\frac{q_1^k}{f'(q_1)}+\cdots+\frac{q_n^k}{f'(q_n)}=0$$

であり，

$$\frac{q_1^{n-1}}{f'(q_1)}+\cdots+\frac{q_n^{n-1}}{f'(q_n)}=1$$

であることを証明せよ．

30.3 定理 30.2 の結論は，荷電密度に，次数が $n-2$ 以下の任意の多項式 $\phi(x,y,z)$ を掛けたとしても，成り立つことを証明せよ．

コメント． A. ギヴェンターリ [36] による一般化がある．「荷電密度に m 次の多項式を掛けると，内点でのポテンシャルは次数が $m+2-n$ 以下の多項式によって与えられる．」

30.4 調和関数 $f(x,y)$ は，等式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

を満たす関数のことである（たとえば，x^2-y^2 とか $\log(x^2+y^2)$ は調和関数である）．

(a) 調和関数は局所的最小値も局所的最大値も持たないことを証明せよ．

(b) 滑らかな調和関数のレベル曲線は単純閉曲線になれないことを証明せよ．

(c) 次の n 次多項式が調和であることを証明せよ．

$$P_n(x)=\sum_{k\equiv n \pmod 2}(-1)^{\frac{n-k}{2}}\binom{n}{k}x^k y^{n-k},$$

$$Q_n(x)=\sum_{k+1\equiv n \pmod 2}(-1)^{\frac{n-k-1}{2}}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.$$

これらの多項式は $(x+iy)^n$ の実部と虚部である．

(d) あらゆる n 次斉次調和多項式は $aP_n(x)+bQ_n(x)$ という形をしていることを証明せよ．ここで，a と b は実数である．

30.5 正と負の電荷のどんな有限の配置も安定ではあり得ないことを証明せよ．

[ヒント]クーロンポテンシャルは調和関数である．

30.6 多項式方程式 $p(x,y)=0$ は代数曲線を定める．代数曲線の卵形線はこの方程式を満たす滑らかな単純閉曲線である(3次曲線の卵形線については第10講参照)．

(a) 第17講(第2巻)で，4次曲線が4本の卵形線を持つことがあることを見た．5本の卵形線を持ち得ないことを証明せよ．

[ヒント]4次曲線は一般の円錐と高々8つの交点しか持たない．

(b) 4次と5次の曲線の卵形線が入れ子となるのは高々2本であり，もし2本の入れ子の卵形線があれば，他には卵形線がないことを示せ．

[ヒント]直線との交点を考えよ．

(c) n 次曲線が持ち得る，互いに入れ子になる卵形線の対の最大数はいくつか？

コメント． 射影平面の中の，n 次代数曲線の最大の成分数は $(n^2-3n+4)/2$ である(ハルナックの定理)．ヒルベルトの第16問題は，代数曲線の卵形線の可能な互いの位置を分類せよというものである．

30.7 共焦点の2つの楕円が与えられたとき，楕円をもう1つの楕円に写すような，(30.3)でのようなアフィン変換を A とする．どんな点 P とその像 $A(P)$ も楕円と共焦点なある双曲線上にあることを証明せよ．

30.8 凸多面体が与えられたとき，面に直交するベクトルで，長さが面の面積に等しいものを考える．これらのベクトルの和が0であることを証明せよ．

[ヒント] 1つの平面から他の平面へ直交射影すると，面積は平面の間の角の余弦を掛けたものになる．

コメント． 主張は物理的には明らかである．問題のベクトルは，多面体の内部の空気によってその面に働く圧力になっているからである．

演習問題の解答

問題番号の肩に†の付いたものは原著には解答がないものであり，著者の意図を尊重し，訳者が若干のヒントを追加したものである．

第20講

20.4 投げ輪が引き下げられたときには，輪の長さは最小化され，円錐上の測地線になる*1．引き下げられた投げ輪にある点を通る円錐の母線に沿って切り開き，円錐を平面上に平らにする．平面的な楔(くさび)が得られ，測地線は直線分に広げられる．この楔が π より小さい角度を持てば，線分は楔の中にあり，輪も円錐上に留まるが，この角度が π より大きければ，輪は円錐から滑って外れる．

円錐をその軸を通る平面で切断したものを考え，2α をその角度とする．円錐を母線に沿って切り，平らにすると，外周部分の長さが $2\pi l\sin\alpha$ の扇形が得られる．ここで，l は母線の長さである．境界線となる場合は，この扇形が半円になる場合であり，そのとき $2\pi l\sin\alpha=\pi l$ となって，それゆえ $\alpha=\pi/6$ となる．

20.6 (a) γ_ε が γ の法線に垂直であることを証明すれば，結果は直ちに得られる(記号は演習 20.6(c)で導入したもの)．

この主張は γ が円であれば明らかで，γ_ε は同心円になる．一般の場合は，γ を各点でその接触円で近似すれば，この同心円がそれぞれの点で γ_ε に接する．

(b) $C(\gamma)$ を γ の全測地曲率とする．$\ell(\gamma^*)=C(\gamma)$ であることを証明すれば，結果は球面曲線に対するガウス=ボネの定理から導かれる．

$\ell(\gamma^*)=C(\gamma)$ であることを証明するために，曲線を球面多角形で近似する．γ が凸な球面多角形であると仮定する．C を多面錐で，単位球面との交わりが γ であるものとし，C^* をその双対錐で，単位球面との交わりが γ^* であるものとする．そのとき，$\ell(\gamma^*)$ は C^* の稜の間の角の和となり，$C(\gamma)$ は C の2面角の π に関する補角の和となる．あとは補題 20.2 を使えばよい．

(c) γ が凸な球面 n 角形であると仮定する(γ が滑らかな閉曲線なら，結果は近似によって得られる)．$l_1,\dots,l_n$ を γ の辺の長さとし，$\alpha_1,\dots,\alpha_n$ を γ の角，$\beta_1,\dots,\beta_n$ を外角とする．γ_ε で囲まれた領域は，γ の辺と，これらの辺から直交する方向に ε の距

*1 [訳註]引っぱられた投げ輪の円錐表面にある部分はということ．

離だけ動かして得られる大円の弧とで囲まれた n 個の領域と，等辺の長さが ε で頂角が $\pi-\alpha_i=\beta_i$ であるような n 個の球面 2 等辺三角形とを，n 角形 γ に加えたものとなる．前者の領域の外周の長さは $l_i \cos\varepsilon$ であり，後者のそれは $\beta_i \sin\varepsilon$ である*2．したがって，

$$\ell(\gamma_\varepsilon) = (\textstyle\sum l_i)\cos\varepsilon + (\sum \beta_i)\sin\varepsilon = \ell(\gamma)\cos\varepsilon + (2\pi - A(\gamma))\sin\varepsilon$$

となる(最後の等式はガウス=ボネの定理から導かれる)．$\gamma_{\varepsilon+\pi/2}=\gamma_\varepsilon^*$ であるので，ガウス=ボネの定理から，

$$A(\gamma_\varepsilon) = 2\pi - \ell(\gamma_{\varepsilon+\pi/2}) = 2\pi + \ell(\gamma)\sin\varepsilon - (2\pi - A(\gamma))\cos\varepsilon$$

が得られる．別の議論もできる．まず，

$$\frac{dA(\gamma_\varepsilon)}{d\varepsilon} = \ell(\gamma_\varepsilon), \quad \frac{d\ell(\gamma_\varepsilon)}{d\varepsilon} = 2\pi - A(\gamma_\varepsilon)$$

を示し(2 番目の等式はガウス=ボネの定理から導かれる)，それゆえ，

$$\frac{d^2 A(\gamma_\varepsilon)}{d\varepsilon^2} = 2\pi - A(\gamma_\varepsilon), \quad \frac{d^2\ell(\gamma_\varepsilon)}{d\varepsilon^2} = -\ell(\gamma_\varepsilon)$$

となる．これらの 2 階の微分方程式は容易に解くことができ，結果が導かれるような初期条件は一意的に選ばれる．

(e) もう一度，γ が凸な球面 n 角形であると仮定する．$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ をその外角とする．すると全曲率は $C(\gamma)=\sum \alpha_i$ となる．γ' の内側の領域は，γ の内部と，等辺が $\pi/2$ で頂角が α_i の n 個の 2 等辺三角形との和集合である*3．後者の面積は α_i であり，したがってガウス=ボネの定理によって，γ' の内側の面積は $\sum \alpha_i + A(\gamma) = C(\gamma) + A(\gamma) = 2\pi$ となる．

---

*2 [訳註]頂点では ε の距離だけ動かす方向が 2 つあり，その端点を頂点から距離 ε の点の作る円弧で結ぶことによって γ_ε を閉曲線にする．各辺は大円の弧になっているので，前者の領域(辺と，辺の各点を ε だけ動かして掃過される 4 辺形状の領域．γ_ε の一部になる部分はもはや大円ではない)の外周部分は，赤道が緯度 ε の等緯線に縮むように縮み，その縮小率は $\cos\varepsilon$ となる．2 等辺三角形の頂点を北極に置けば，等辺は等経線になり，底辺は等緯線になる．この等緯線の作る平面上に，等辺の長さが $\sin\varepsilon$ で，頂角が β の扇形が得られ，その弧の長さは $\beta_i \sin\varepsilon$ となる．

*3 [訳註]問題で与えられた γ' の定義は不完全である．何より，閉曲線にならず，内側の領域ということに意味がない．この記述に意味を持たせるように以下のように解釈してみた．

γ の頂点を $A_1, A_2, \cdots, A_n$ とする．各 $A_i A_{i+1}$ を大円の弧と考えているので(i は mod n で考えている)，その向きに $\pi/2$ だけ進めた大円の弧を $A_i' A_{i+1}''$ とする．これだけでは一般にはつながっていない n 個の弧の集まりになるだけであり，A_{i+1}'' と A_{i+1}' とを大円の劣弧で結んで閉曲線にしたものを γ' とすることにする．こう定義すれば γ' の内側の領域は上で述べた集合になる．

20.9 **20.10** [31]参照.

第 21 講

21.2 (x, y, z) を単位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ の点とし，その平面への立体射影を (X, Y) とする*4．三角形の相似から，具体的な公式

$$x=\frac{2X}{R^2+1},\quad y=\frac{2Y}{R^2+1},\quad z=\frac{R^2-1}{R^2+1}$$

が得られる．ここで，$R^2=X^2+Y^2$ である．平面曲線 $(X+a)^2+(Y+b)^2=c^2$ を考える．この方程式は $R^2+2aX+2bY=d$ と書き直すことができる．ここで，$d=c^2-a^2-b^2$ としている．さらにこれを

$$\frac{2aX}{R^2+1}+\frac{2bY}{R^2+1}+\frac{(d+1)(R^2-1)}{2(R^2+1)}=\frac{d-1}{2}$$

と書き，さらに $2ax+2by+(d+1)z=(d-1)$ と書き直すことができる．これは(北極 $(0, 0, 1)$ を通らない)平面の方程式であり，この平面と球面との交わりは円周である．それゆえ，立体射影の下での平面の円周の原像は球面上の円周である．連続性により，直線の原像は，北極を通る球面上の円周であるということができる．

立体射影が円周の間の角を変えないことを証明するには，円周の一方，たとえば C_1 が経線であると仮定して証明すれば十分である．C_2 を球面上のもう 1 つの円周とし，X を C_1 と C_2 の交点の 1 つとする．C_2 を，X を通り，この点で C_2 に接し，北極を通る円周 C_3 に取り換える．C_0 を，北極で C_3 に接する経線とする．L_0, L_1, L_3 を C_0, C_1, C_3 の立体射影による像とする．これらは平面上の直線で，L_0 は L_3 に平行である．C_1 と C_3 の間の角が L_1 と L_3 の間の角に等しいことを証明すれば十分である．実際，L_1 と L_3 の間の角は L_1 と L_0 の間の角に等しい(平行線の性質)．後者は C_1 と C_0 の間の角に等しい(明らか)．そしてこれは C_1 と C_3 の間の角に等しい(2 つの円周で作られる 2 つの角は等しい)．

21.3 証明のアイデアは定理 21.1 の証明と同様なもの(で，ある意味双対なもの)である．

P が外接すると仮定する．面 $A_1A_2\cdots A_n$ を考え，それが球面と接する点を O とする．明らかに，角 A_iOA_{i+1} の和は 2π である．同様に，これらすべての角をすべての面について足すのだが，そのとき白い面の中の角は正の符号を取り，黒い面の中の角は負の符号を取るとする．黒い面の方が多いので，この和 Σ は負である．

---

*4 [訳註]以下では，北極からの立体射影を考えている．

一方，共通の稜 AB を持つ 2 つの隣接する面を考える(図 S.12 参照)．角 AOB と $AO'B$ は等しい．実際，平面 AOB を，平面 $AO'B$ に一致するまで，直線 AB の周りを(AB が蝶番であるかのように)回転させる．この回転で，O は O' に移されるので(図 S.12 参照)，三角形 AOB と $AO'B$ は合同である．

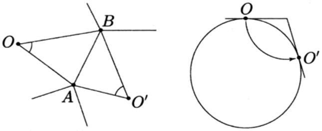


図 S.12　演習問題 21.3 の解

隣接する面には，黒-白と白-白の 2 種類があって，前者の Σ への寄与は打ち消し合うが，後者は正の数の寄与をする，こうして，$\Sigma \geqq 0$ となり，矛盾となる．

21.4　k をあらゆる頂点に隣接する面の数，e を稜の数，b と w を黒と白の頂点の数とする．稜の数を 2 通りに計算しよう．一方で，あらゆる黒い頂点に隣接する k 本の稜があり，だから $e=bk$ である．同じ理由で $e=wk$ であり，それゆえ $b=w$ である．

第 22 講

22.5　P を問題の多面体とする．$\mathrm{Dehn}(P) \neq 0$ とする．はっきりさせるために，$\mathrm{Dehn}(P)$ の中の $a_i \otimes \alpha_j$ の係数が $c \neq 0$ であるとする(22.4 節の $\mathrm{Dehn}(P)$ の定義を参照)．V を多面体 P の体積，d を P の直径とする．さらに，C を，$\mathrm{Dehn}(P)$ に寄与する P の稜すべての，$a_i \otimes \alpha_j$ の係数の絶対値の和とする．P に合同な多面体による空間のタイル貼りを考える．空間に，半径 R のある球体 B を固定し，Q を，B との交わりが空でないようなタイルの和集合とする．N を Q の中のタイルの数とする．$Q \supset B$ なのだから，

$$N \geqq \frac{\text{体積}\ (B)}{\text{体積}\ (P)} = \frac{4\pi R^3}{3V}$$

となる．$\mathrm{Dehn}(Q)$ における $a_i \otimes \alpha_j$ の係数の絶対値は $N|c|$ である．一方，Q の稜はすべて，半径が $R+d$ と $R-d$ の同心球面の間の領域に含まれる P のコピーに属す(図 S.13 参照)．

この領域の体積は

$$\frac{4}{3}\pi((R+d)^3-(R-d)^3) = \frac{4}{3}\pi(6R^2d+2d^3) = \frac{8}{3}\pi d(3R^2+d^2)$$

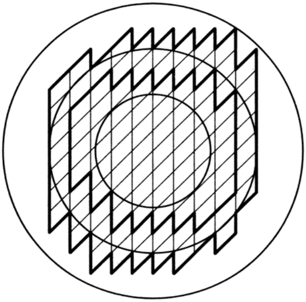


図 S.13　外側の立体外形は多面体 Q を象徴するもの．2 つの立体外形の間のタイルが，Q のデーン不変量に寄与する．

である．それゆえ，この領域の中のタイルの数は $\frac{8\pi d(3R^2+d^2)}{3V}$ を超えず，P のこれらのコピーの稜の寄与の絶対値は $\frac{8\pi d(3R^2+d^2)}{3V}\cdot C$ を超えることができない．こうして，

$$\frac{4\pi R^3}{3V}\cdot|c| \leqq \frac{8\pi d(3R^2+d^2)}{3V}\cdot C, \quad |c| \leqq \frac{2d(3R^2+d^2)}{R^3}\cdot C$$

となり，R は任意に大きく選んでもよいのだから，このことから，$|c|$ が任意の正の数よりも小さいことが分かる．これは $|c|$ が正であることに矛盾する．[48]とそこにある参考文献を参照せよ．

第 23 講

23.1　ここには白い升と同じだけの黒い升がある．しかしながら，図の左半分では黒い升が多く，右半分では白い升が多い(それぞれ 16 対 9 になっている)．タイル貼りがあったとする．すると，図 23.24 の真ん中の波線には高々 1 つのタイルが交わり，多角形の左半分は(波線に隣接する一番右の升を除いてになるかもしれないが)ドミノでタイル貼りされる．しかし，黒と白の升の数が釣り合っていないので，これは不可能である．

23.4　定理 23.1 の証明と同じように議論する．$n\equiv 0, 2, 9, 11 \bmod 12$ に対するタイル貼りの存在は，$n\leqq 12$ に対する具体的な構成を示した後，$n=12k$ に対するタイル貼りから $n=12k+l$ $(l=2, 9, 11, 12)$のときに拡張することによって示される*5．

*5 [訳註]上底が 3 で下底 9 の台形，上底が 10 で下底が 11 の台形，上底が 13 で下底が 14 の台形に具体的にタイル貼りしてみるとよい．

ほかの n の値に対してタイル貼りが存在しないことを証明するために，最初にタイル貼りが存在するための1つの必要条件が点の数が3で割り切れることであることに注意する．$n(n+1)/2 \equiv 0 \bmod 3$ だから，$n \equiv 0$ or $2 \bmod 3$ となる．こうして，$n \equiv 3, 5, 6, 8 \bmod 12$ を考えれば十分である．タイルの境界の語は $x^2yx^{-1}yx^{-1}y^{-2}$ と $xy^2x^{-2}y^{-1}xy^{-1}$ である．その6角グリッド上の影は閉じている．6角グリッド上の向きづけられた閉じた道に，6角領域に関する回転数の和を対応させる．これらの数はタイルの境界の道に対しては ± 1 に等しく，領域の境界の道に対しては $[(n+1)/3]$ である．これから，領域が m 個のタイルでタイル貼りされるなら $[(n+1)/3] \equiv m \bmod 2$ となることが導かれる．一方，$n(n+1)/2 = 3m$ である．それゆえ，$n(n+1)/2 \equiv m \bmod 2$ となる．したがって，$[(n+1)/3] \equiv n(n+1)/2 \bmod 2$ となるが，この合同式が $n \equiv 3, 5, 6, 8 \bmod 12$ に対して成り立たないことは，容易に分かる．

23.5　定理23.3の証明と同じように議論する．加法的関数 $f(x)$ を，$f(1)=1$, $f(\sqrt{2}) = -0.5$ と，x が1と $\sqrt{2}$ の有理線形結合でないときは $f(x)=0$ として定義する．$u \times v$ 長方形の「面積」を $f(u)f(v)$ と定義する．すると，図23.25の多角形の「面積」は -0.75 となる．もし多角形が正方形でタイル貼りされるなら，その「面積」は非負であるので，結果が得られる．

第24講

24.3　次の議論は定理10.3の証明に似ている．$\gamma(\phi)$ と $\gamma_1(\phi)$ を，その接線の向きにパラメータづけられた2つの卵形線とする．そのとき，$\gamma_1'(\phi) = h(\phi)\gamma'(\phi)$ となる．ここで，関数 h は比 ds_1/ds である．h が少なくとも4つの極値を持つことを示したい．

$f_1(\phi)$ と $f_2(\phi)$ をベクトル値関数 $\gamma(\phi)$ の成分とする．γ_1 は閉曲線なので，

$$0 = \int_0^{2\pi} \gamma_1'(\phi)d\phi = \int_0^{2\pi} h(\phi)(f_1'(\phi), f_2'(\phi))d\phi$$

であり，それゆえ $\int hf_1'\, d\phi = \int hf_2'\, d\phi = 0$ である．これから部分積分により，$\int h' f_1\, d\phi = \int h' f_2\, d\phi = 0$ が導かれる．明らかに，$\int h'\, d\phi = 0$ でもある．

h' の符号変化が2回だけと仮定する．関数 $f_1, f_2, 1$ の線形結合 af_1+bf_2+c で，h' と同じ点で符号が変わるものを見つけることができる*6．関数 af_1+bf_2+c は他に零点を持たない．そうでなければ，直線 $ax+by+c=0$ と卵形線 γ_1 との交点の数が2より多くなるからである．したがって，af_1+bf_2+c は h' と同じ区間で符号が一定になり，$\int h'(af_1+bf_2+c)d\phi \neq 0$ となる．これは，上の段落の議論と矛盾する．

---

*6 ［訳註］仮定から h' の零点は2点で，その2点を通る直線 $ax+by+c=0$ を考えればよい．

24.4 これは前問の離散的な類似である．P の頂点の位置ベクトルを $V_1, \cdots, V_n$ と書き，$\ell_i = |V_{i+1} - V_i|$ とする．$h_i = \ell'_i/\ell_i$ とおく．P' が閉じた折れ線(多角形)なので，$\sum h_i(V_{i+1} - V_i) = 0$ となる．これから $\sum(h_{i+1} - h_i)V_i = 0$ が導かれる(離散的な部分積分による*7)．$g_i = h_{i+1} - h_i$ とおく．巡回的な数列 g_i は，恒等的に 0 であるか，少なくとも 4 回符号を変えるというのが主張である．$\sum g_i = 0$ であるから，少なくとも 2 回符号を変えるか，すべての i に対して $g_i = 0$ であるかである．符号変化がちょうど 2 回であると仮定する．そのとき，ある直線 m があって，P の頂点が m の一方の側にあるとき $g_i \geqq 0$ であり，もう一方の側にあるとき $g_i \leqq 0$ となっており，少なくとも 1 つは正の値と負の値がある．直線 m の上に原点を選ぶ．そのとき，点 $\sum g_i V_i$ は m の $g_i > 0$ の側にあり*8，それゆえ $\sum g_i V_i$ は 0 ではない．これは矛盾である．

最後に，もし $g_{i-1} < 0 < g_i$ ならば $h_{i+1} > h_i < h_{i-1}$ となり，それゆえ $\ell'_{i+1}/\ell_{i+1} > \ell'_i/\ell_i < \ell'_{i-1}/\ell_{i-1}$ となる．したがって $a_i > 0$ となる．$g_{i-1} > 0 > g_i$ の場合も同様である．

24.5 [39]の定理 2.19 参照．

第 25 講

25.7 (a) P_t の稜 E を考え，長さを $l(t)$，2 面角を $\varphi(t)$ とする．$n(t)$ と $n_1(t)$ を，E を共有する面 F と F_1 の単位外法ベクトルとし，$w(t)$ と $w_1(t)$ を，F と F_1 における E への内法ベクトルで，長さが $l(t)$ であるものとする．そのとき，

$$-l(t)\varphi'(t) = n'(t) \cdot w(t) + n'_1(t) \cdot w_1(t) \qquad \text{(S.2)}$$

が成り立つことを主張する．ここで，肩の記号 $'$ は d/dt を表している．実際，E に直交する平面にデカルト座標を選んで，θ と θ_1 を，$n(t)$ と $n_1(t)$ が x 軸となす角とする．そのとき，問題のベクトルは

$$n = (\cos\theta, \sin\theta), \quad n_1 = (\cos\theta_1, \sin\theta_1),$$
$$w = l(\sin\theta, -\cos\theta), \quad w_1 = l(-\sin\theta, \cos\theta)$$

となる．したがって，

---

*7 [訳註]同類項のまとめ直しにすぎない．

*8 [訳註] m の $g_i \geqq 0$ の側を m_+，$g_i \leqq 0$ の側を m_- とする．m 上に原点があるので，m_- のベクトルに負の数を掛けると，m_+ に属す．したがって，ベクトル $g_i V_i$ は原点であるか，m_+ に属すかになり，それらを足しても，m_+ に属し，(2 つは 0 でないのだから) m に属さないことになる．

$$n' = \theta'(-\sin\theta, \cos\theta) = -\frac{1}{l}\theta' w, \quad n_1' = \theta_1'(-\sin\theta_1, \cos\theta_1) = \frac{1}{l}\theta_1' w_1$$

となり，それゆえ $n'\cdot w + n_1'\cdot w_1 = l(\theta_1' - \theta')$ となる．あとは $\theta_1(t) - \theta(t) = \pi - \varphi(t)$ に注意するだけである．

P のあらゆる面 F に対して，この面の内部の稜への内法ベクトルで，稜の長さと同じ大きさのものの和は 0 になる(演習問題 30.8 と比べること)．この和と，F への単位外法ベクトルの微分との内積を取り，すべての面に関して和を取る．得られる和は 0 であり，(S.2)の右辺のすべての稜についての和に等しい．これから結果が得られる．

第 26 講

26.2 (b) 区間 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ は，$[0.1]_3$ 以外の，$[0.1\cdots]_3$ という形の数からなる．区間 $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ と $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ は，$[0.01]_3$ と $[0.21]_3$ 以外の，$[0.01\cdots]_3$ と $[0.21\cdots]_3$ という形の数からなる，というようになっている．こうして，C は，すべての i に対して $d_i \neq 1$ であるようなすべての $[0.d_1d_2d_3\cdots]_3$ と，$1 \leqq i < n$ に対して $d_i \neq 1$ であるような数 $[0.d_1 d_2\cdots d_{n-1}1]_3$ とからなる．

(a)

$$\frac{1}{4} = 2\cdot\frac{1}{8} = 2\cdot\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \cdots\right) = [0.020202\cdots]_3,$$
$$\frac{10}{13} = 20\cdot\frac{1}{26} = [202]_3\left(\frac{1}{27} + \frac{1}{27^2} + \cdots\right) = [0.202202202\cdots]_3,$$
$$\frac{19}{27} = \frac{2}{3} + \frac{1}{27} = [0.201]_3$$

であるので*9，(b)によって，これらの数は C に属す．

26.3 (a) γ の定義から，

$$\gamma[0.1\cdots]_3 = [0.1]_2, \quad \gamma[0.001\cdots]_3 = [0.001]_2,$$
$$\gamma[0.01\cdots]_3 = [0.01]_2, \quad \gamma[0.021\cdots]_3 = [0.011]_2,$$
$$\gamma[0.21\cdots]_3 = [0.11]_2, \quad \gamma[0.201\cdots]_3 = [0.101]_2,$$
$$\gamma[0.221\cdots]_3 = [0.111]_2$$

---

*9 ［訳註］$[0.\underbrace{\dot{0}0\cdots0\dot{1}}_{k}]_n = \frac{1}{n^k} + \frac{1}{(n^k)^2} + \frac{1}{(n^k)^3} + \cdots = \frac{1}{n^k - 1}$ であることを使うと，分数の n 進展開が簡単に計算できることがある．上の 2 式は $n=3$, $k=2, 3$ の場合になっている．

であることが分かる．$\gamma(x)$ を作っていくはっきりした規則があって，次のようになる．$x=[0.d_1d_2d_3\cdots]_3$ とする．d_i の中に 1 があるならば，$d_n=1$ となる最初の n を取り，

$$\gamma[0.d_1d_2d_3\cdots]_3=[0.e_1\cdots e_{n-1}1]_2,\quad e_i=\frac{d_i}{2}$$

とおく．γ を全区間 $[0,1]$ の上の連続関数に拡張するには，すべての i に対して $d_i\neq 1$ ならば，

$$\gamma[0.d_1d_2d_3\cdots]_3=[0.e_1e_2e_3\cdots]_2,\quad e_i=\frac{d_i}{2}$$

とおくことになる．

(b) $\frac{1}{4}=[0.020202\cdots]_3$ であるから，$\gamma\left(\frac{1}{4}\right)=[0.010101\cdots]_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{1}{3}$ となる．$\frac{5}{13}=10\cdot\frac{1}{26}=[0.101101101\cdots]_3$ であるから，$\gamma\left(\frac{5}{13}\right)=[0.1]_2=\frac{1}{2}$ となる．

(c) (a)で解決済み．

(d) 明らかに(a)から導かれる[*10]．

26.4 (a) 最初の曲線 F を F_0 と書き，$F_1=\widetilde{F_0}$, $F_2=\widetilde{F_1}$ などとおく．構成から明らかなことだが，F_n はあらゆる区間 $\left[\frac{k}{4^n},\frac{k+1}{4^n}\right]$ を $\left[\frac{\ell_1}{2^n},\frac{\ell_1+1}{2^n}\right]\times\left[\frac{\ell_2}{2^n},\frac{\ell_2+1}{2^n}\right]$ の形の正方形に写す．さらに，指定された形の 4^n 個の異なる区間を指定された形の 4^n 個の異なる正方形に写し，隣り合った区間は隣り合った正方形に写す．それに加えて，

$$F_n\left[\frac{k}{4^n},\frac{k+1}{4^n}\right]\subset\left[\frac{\ell_1}{2^n},\frac{\ell_1+1}{2^n}\right]\times\left[\frac{\ell_2}{2^n},\frac{\ell_2+1}{2^n}\right]$$

であれば，あらゆる $p>n$ に対して

$$F_p\left[\frac{k}{4^n},\frac{k+1}{4^n}\right]\subset\left[\frac{\ell_1}{2^n},\frac{\ell_1+1}{2^n}\right]\times\left[\frac{\ell_2}{2^n},\frac{\ell_2+1}{2^n}\right]$$

となる．このことは，あらゆる $t\in[0,1]$ とあらゆる $p,q\geqq n$ に対して，$F_p(t)$ と $F_q(t)$ の間の距離が $\frac{\sqrt{2}}{2^n}$ を越えられないことを示している．後は解析の標準的な定理を使うだけでよい．「コーシーの判定条件」から関数列 F_n がある写像 $[0,1]\to[0,1]^2$ に一様に収束する(その写像を P と呼ぼう)ことが分かる．また，連続関数列の一様収束極限はまた連続であるという定理があり，それゆえ P は連続である．

(b) 明らかに，$F_n\left(\frac{k}{4^n}\right)$ は元の写像 F によらず，

---

*10 [訳註]任意の n に対する n 進小数展開でも，有理数であるのは有限小数であるか循環小数であることと同値であることに注意する．

$$F_n\left(\frac{k}{4^n}\right)=F_{n+1}\left(\frac{k}{4^n}\right)=\cdots=P\left(\frac{k}{4^n}\right)$$

となる．こうして，4^n という形の分母を持つ分数での P の値は F によらず，また，これらの分数が $[0,1]$ の稠密な部分集合をなすので，P はまったく F にはよらない．

(c)　(a)の解答の中で，P の像が，あらゆる n に対し，あらゆる正方形 $\left[\frac{\ell_1}{2^n},\frac{\ell_1+1}{2^n}\right]\times\left[\frac{\ell_2}{2^n},\frac{\ell_2+1}{2^n}\right]$ の中にある点を含むことが示されている．このことは，P の像が $[0,1]^2$ の中で稠密であることを示している．しかし，どんな連続写像に関する $[0,1]$ の像も閉集合であり，それゆえ，正方形 $[0,1]^2$ の全体にならなければならない．

(e)　どんな $t\in[0,1]$ も，A を 0 と 1 の**無限**列として，$[0.A]_2$ と表されているとしてよい(ある時点からは 0 だけとか 1 だけとかになってもよい)．数列 A に対し，0 を 1 で，1 を 0 で置き換えた「反対」列を $\overline{A}$ と書く．$F[0.A]_2=([0.B]_2,[0.C]_2)$ とする．(b)に従って，F が「対称」である，つまり，$F[0.\overline{A}]_2=([0.B]_2,[0.\overline{C}]_2)$ であると仮定してよい．演習問題 26.4 の前に与えられた $\widetilde{F}$ の定義は

$$\widetilde{F}[0.00A]_2=([0.0C]_2,[0.0B]_2),\quad F[0.01A]_2=([0.1B]_2,[0.0C]_2),$$
$$\widetilde{F}[0.10A]_2=([0.1B]_2,[0.1\overline{C}]_2),\quad F[0.11A]_2=([0.0C]_2,[0.1\overline{B}]_2)$$

と言い直してもよい．これらすべての公式で，F と $\widetilde{F}$ を P に取り直すことが許される．

(f)　上の式は，数字 0 と 1 のどんな $2n$ 項の列 a に対しても，$F_n[0.aA]_2=([0.bB']_2,[0.cC']_2)$ または $([0.cC']_2,[0.bB']_2)$ であることを示している．ここで，b と c は a だけに依存する n 項の列で，$B'=B$ または $\overline{B}$ であり，$C'=C$ または $\overline{C}$ である．この手続きを 4 回繰り返せば，次の結果が得られる．$P[0.A]_2=([0.B]_2,[0.C]_2)$ であれば，長さが偶数のどんな語 a に対しても，$P[0.aaaaA]_2=([0.bB]_2,[0.cC]_2)$ となる．ここで，b と c は a だけに依存する．このことから，もし A が周期的なら，B と C も周期的であることが導かれる．これを示そう．もし A がある地点から周期的であるなら，$A=aA_1$ となる．ここで，A_1 は(純)周期的で，a の長さは偶数である．上の式は，この場合に，B と C もある地点から周期的であることが示される．

(d)　$\frac{1}{3}=[0.010101\cdots]_2$ である．$A=010101\cdots$ とし，$P[0.A]_2=([0.B]_2,[0.C]_2)$ とする．そのとき，

$$P\left(\frac{1}{3}\right)=P[0.01A]_2=([0.1B]_2,[0.0C]_2)=([0.B]_2,[0.C]_2)$$

となる．こうして，$B=1B$，$C=0C$ であり，それゆえ，$B=11111\cdots$，$C=00000\cdots$ となる．それゆえ，

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = (1,0)$$

である．

$\frac{1}{5}$=$[0.001100110011\cdots]_2$ である．A=001100110011⋯ として，$P[0.A]$=$([0.B]_2, [0.C]_2)$ とする．そのとき，

$$P[0.11A]_2 = ([0.0C]_2, [0.1\overline{B}]_2), \quad P[0.0011A] = ([0.01\overline{B}]_2, [0.00C]_2)$$

となり，それゆえ，

$$P[0.00110011A]_2 = ([0.0110B]_2, [0.0000C]_2)$$

となる．こうして，B=0110B，C=0000C となり，それゆえ，B=011001100110⋯，C=000000⋯ となって，

$$P\left(\frac{1}{5}\right) = ([0.B]_2, [0.C]_2) = \left(\frac{2}{5}, 0\right)$$

となる．

（もっと挑戦をしてみたいという読者は $P\left(\frac{1}{7}\right)$ を計算してみるとよい．我々の計算によると，答えは $\left(\frac{29}{65}, \frac{28}{65}\right)$ である．）

第 27 講

27.1　(b) **答．** $-(x^2y-x-1)^2-(x^2-1)^2$.

27.2　(b) **答．** $x^2(1+y)^3+y^2$.

27.3　[27]参照．

第 28 講

28.2†　(a) 答えだけ述べておく．$F_{\pm}=(\pm e, 0)$ を焦点とし，距離の和が $2a$ である楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

である(ただし，$b=\sqrt{a^2-e^2}$ とする)．$F_{\pm}=(\pm e, 0)$ を焦点とし，距離の差が $2a$ である双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

である(ただし，$b=\sqrt{e^2-a^2}$ とする)．$F=(e,0)$ を焦点とし，直線 $x=-e$ を準線とする放物線の方程式は $y^2=4ex$ である．このとき，等しい距離は e になる．

(b) 楕円と双曲線で，焦点は(a)と同じとし，距離の和を $\sqrt{a^2+\lambda}$ とすれば共焦点楕円族の方程式，距離の和を $\sqrt{a^2-\lambda}$ とすれば共焦点双曲線族の方程式が得られる．

放物線族の場合，曲線が原点を通るように標準形を取ったので，$y^2=4ex$ の形をしている．点 $(-\lambda,0)$ を通るようにし，共通の距離を λ とすれば，$y^2=4(e+\lambda)(x+\lambda)$ が得られる．

28.4† 図 28.4 を使って説明する．焦点 F_2 から出発した軌跡が最初に壁にあたる点 P_1 が第 1 象限にあったとする．この軌跡が，F_1 と F_2 を通ってまた壁にあたる点を P_2 とすると，P_2 は第 1 象限にあり，P_2 の x 座標は P_1 の x 座標より大きくなって，これを繰り返せば長軸に近づいていく．P_1 が第 4 象限にあっても同様である．

P_1 が第 2 象限にあるときは，次に軌跡が壁にあたる点 Q は第 4 象限か第 3 象限にある．Q が第 4 象限にあるときは，P_2 は第 1 象限にあり，P_2 を P_1 と思い直せば上と同じ議論である．Q が第 3 象限にあるときは，F_1 から出発し，最初に壁にあたる点 Q が第 3 象限にあることになり，上の議論を上下と左右に対称にすればよい．

上の議論での例外を考える．P_1 が y 軸上にあれば，P_2 が第 1 象限か第 4 象限にあるし，x 軸上にあれば軌跡は長軸そのものである．

28.5 (a)† 包絡線は，A を通り円盤 O に内接する円の中心 P の軌跡になる．円 P と円 O との接点を X とすると，X を A に重ねる折り曲げの折り線は P を通る．$PX=PA$ だから，$OP+AP=OP+PX=OX$ は円 O の半径だから一定で，A と O を焦点とする楕円となる．

A が円 O の外部にある場合も，包絡線は，A を通り円 O に外接する円の中心 P の軌跡になる．円 P と円 O との接点を X とすると，X を A に重ねる折り曲げの折り線は P を通る．$PX=PA$ だから，$OP-AP=OP-PX=OX$ は円 O の半径だから一定で，A と O を焦点とする双曲線となる．

直線 ℓ とその上にない点 A の場合も，包絡線は，A を通り直線 ℓ に接する円の中心 P の軌跡になる．円 P と ℓ の接点を X とすると，PX は ℓ への垂線になり，$PX=PA$ だから，A を焦点とし，ℓ を準線とする放物線となる．

28.8 図 S.14 参照．この図で，放物線の焦点 F_1 はまた楕円の焦点でもある．2 つの円錐曲線は任意の曲線によって滑らかに結ばれている．この作図が解答を与えている

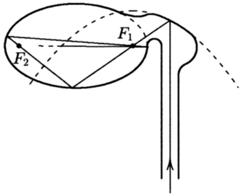


図 S.14　平行なビームに対するトラップ

ことは，演習問題 28.4(とその解答)を使えば示される．

28.9　[59], [88]参照.

第 29 講

29.5　辺の長さが 1 の正三角形の内部にある円の 3 つ組を 2 つ考えて，その面積を比較しよう．最初の配置は，3 つの等しい円周からなり，それぞれが三角形の角に内接し，2 つの他の円に外接するものとする．r をそのような円の半径とする．そのとき，$2r+2\sqrt{3}r=1$ であり，それゆえ $r=1/(2(1+\sqrt{3}))$ となる．3 つの円の面積は $A_1=3\pi/(4(1+\sqrt{3})^2)$ であり，$A_1/\pi\approx 0.1005$ である．

第 2 の配置は，三角形の内接円と，2 つの小さな同じ円で，三角形の 2 つの角に内接しそれぞれ大きな円に外接する(互いには接しない)ものからなるとする．R を大きな円の半径とし，r を小さい方の円の半径とする．そのとき $R=\sqrt{3}/6$ となる．もう 1 つの半径は等式 $(0.5-\sqrt{3}r)^2+(R-r)^2=(R+r)^2$ から求められる．この 2 次方程式は $\sqrt{3}/2$ と $\sqrt{3}/18$ という 2 つの根を持ち，r はその後者である．3 つの円の全面積は $A_2=\pi/12+\pi/54$ であり，$A_2/\pi\approx 0.1018$ である．こうして，第 2 の配置の面積の方が大きい．

以上の 2 つに匹敵するような配置もある．三角形の 1 つの角に内接し，鎖になるような 3 つの円からなるものである．もし三角形が非常に細長い 2 等辺三角形であれば，そのような円の鎖の全面積は，他の 2 円に接するような 3 つの円の作るマルファッティの配置の全面積のほとんど 2 倍になる．

第 30 講

30.1

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_{n+1})}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_{n+1})}.$$

多項式は一意的である．

30.2† 原著の解答には誤解があるようである．一応の解答を与えておこう．

$k=0, 1, \cdots, n-1$ に対して

$$g_k(q_1, \cdots, q_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^k}{f'(q_i)}$$

を考えると，g_k は変数 $q_1, \cdots, q_n$ の対称関数になっている．(30.2)式の上にある $f'(q_i)$ の表示式により，通分すると，

$$g_k(q_1, \cdots, q_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_k^i h_k^i}{\Delta(q_1, \cdots, q_n)} = \frac{h_k}{\Delta(q_1, \cdots, q_n)}$$

という形の，$q_1, \cdots, q_n$ の分数式になる．ここで，h_k^i は $q_1, \cdots, q_n$ の多項式であり，h_k も $q_1, \cdots, q_n$ の多項式である．差積

$$\Delta(q_1, \cdots, q_n) = \prod_{i<j} (q_i - q_j)$$

は交代式で，交代式は差積 Δ で割り切れる（このことは因数定理を繰り返し使えば得られる）ことを使えば，演習問題の解答は得られる．

もう少し詳しく言えば，g_k の各項は，分母が $n-1$ 次斉次の多項式で，分子が k 次斉次の多項式なので，通分したときの分子 h_k も斉次多項式で，その次数 $\deg h_k$ と分母 Δ の次数 $\deg \Delta = \dfrac{n(n-1)}{2}$ の差は同じだから，

$$\deg h_k = k-(n-1)+\deg \Delta \begin{cases} < \deg \Delta & (k < n-1 \text{ のとき}) \\ = \deg \Delta & (k = n-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる．また，g_k が対称関数で，Δ が交代式なので，$h_k = g_k \cdot \Delta$ も交代式である．したがって，h_k は Δ で割り切れるのだが，$k<n-1$ のときは次数が足りないので 0 になる．$k=n-1$ のときは Δ の定数倍になるが，係数比較により，一致することが分かり，$g_{n-1} \equiv 1$ となる．

30.3 $n-2$ 次以下の多項式 $h(x)$ に対して，

$$\frac{h(q_1)}{f'(q_1)}+\frac{h(q_2)}{f'(q_2)}+\cdots+\frac{h(q_n)}{f'(q_n)}=0$$

が証明できれば，問題の主張はすぐに導かれる．ここで，和は n 次の双曲多項式 $f(x)$ のすべての根にわたって取られる．多項式 $h(x)$ は単項式 $1, x, \cdots, x^{n-2}$ の線形結合だから，結果は演習問題 30.2 から導かれる．

30.7 第 28 講で導入された楕円座標の概念を思い出そう．円錐曲線の共焦点族

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$$

が与えられたとき，点 (x, y) の楕円座標はこの方程式が成り立つような λ の 2 つの値である．楕円座標の 1 つを固定することで楕円を表し，もう 1 つを固定することで共焦点の双曲線を表す．(λ, μ) が点 (x, y) の楕円座標であれば，計算で容易に

$$x^2=\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)}{a^2-b^2}, \quad y^2=\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)}{b^2-a^2}$$

であることがわかる．$P=(x, y)$ を楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

の点であり，$Q=(X, Y)=A(x, y)$ を楕円

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$$

の対応する点とする．ここで，$X=x\sqrt{a^2+\lambda}/a$, $Y=y\sqrt{b^2+\lambda}/b$ である．P の楕円座標を $(0, \mu)$ とし，Q の楕円座標を (λ, η) とする．$\mu=\eta$ であることを証明したい．実際，楕円座標でデカルト座標を表すと，

$$x^2=\frac{a^2(a^2+\mu)}{a^2-b^2}, \quad X^2=\frac{(a^2+\lambda)}{a^2}\,\frac{a^2(a^2+\mu)}{a^2-b^2}=\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\eta)}{a^2-b^2}$$

となる．それゆえ，$\mu=\eta$ となり，これが必要なことであった．

参考文献

この文献は全3冊共通であり，この第3巻で引用されている
文献の番号は太字で表した．

[1] アダムズ(C. Adams)『結び目の本．結び目の数学理論への初等的入門』(*The knot book. An elementary introduction to the mathematical theory of knots*), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004. 日本語訳がある：C.C. アダムス『結び目の数学 結び目理論への初等的入門』(金信泰造訳)培風館(1998).

[2] アイグナー，ツィーグラー，ホフマン(M. Aigner, G. Ziegler, K.H. Hofmann)『天書の証明』(*Proofs from THE BOOK*), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2004. 原著第2版(2001)の日本語訳がある：アイグナー，ツィーグラー『天書の証明』(蟹江幸博訳)シュプリンガー・フェアラーク東京(2002). 丸善出版より復刊予定.

[3] アルヴァレス(J.-C. Alvarez)『2次元でのヒルベルトの第4問題』(*Hilbert's fourth problem in two dimensions*), MASS Selecta, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, 165–184.

[**4**] アーノルド(V.I. Arnold)『古典力学の数学的方法』(*Mathematical methods of classical mechanics*), Springer-Verlag, New York, 1989. ロシア語原書(1974)からの日本語訳がある：アーノルド『古典力学の数学的方法』(安藤，蟹江，丹羽訳)岩波書店(1980).

[**5**] バース，バウワー(W. Barth, Th. Bauer)『ポンスレの定理』(*Poncelet theorems*), Expos. Math. **14** (1996), 125–144.

[6] ビアンキ(L. Bianchi)『微分幾何学講義』(*Vorlesungen über Differentialgeometrie*), Teubner, Leipzig, 1910.

[**7**] ブリーカー(D. Bleecker)『凸多面体の体積が増加する等長変形』(*Volume increasing isometric deformations of convex polyhedra*), J. Diff. Geom. **43** (1996), 505–526.

[8] ブラシケ(W. Blaschke)『網の幾何学入門』(*Einführung in die Geometrie der Waben*), Birkhauser, Basel, Stuttgart, 1955.

[**9**] ボルチャンスキー(V. Boltianskii)『ヒルベルトの第3問題』(*Hilbert's third problem*), John Wiley & Sons, Wash., New York, 1978.

[**10**] ボス，カーズ，オールト，レイヴン(H. Bos, C. Kers, F. Oort, D. Raven)『ポンスレの閉包定理』(*Poncelet's closure theorem*), Expos. Math. **5** (1987), 289–364.

[11] ブルン，スタッバン，フィエルドスタット，タンブス，アウベルト，リュングレ

ン，ヤコブスタール(V. Brun, J.O. Stubban, J.E. Fjeldstad, L. Tambs, K.E. Aubert, W. Ljunggren, E. Jacobsthal)『2つの2項係数の差の可約性について』(*On the divisibility of the difference between two binomial coefficients*), Den 11te Skandinaviske Matematikerkongress, Trondheim, 1949, 42–54.

[12] ブラゴ，ザルガラー(Yu. Burago, V. Zalgaller)『多面体計量を持つ2次元多様体の$\mathbb{R}^3$への等長な区分的線形埋めこみ』(*Isometric piecewise-linear embeddings of two-dimensional manifolds with a polyhedral metric into* $\mathbb{R}^3$), St. Petersburg Math. J. **7** (1996), 369–385.

[13] カルティエ(P. Cartier)『多面体の分解：ヒルベルトの第3問題についての論点』(*Decomposition des polyèdres: le point sur le troisième problème de Hilbert*), Astérisque **133–134** (1986), 261–288.

[14] チャーン(S.-S. Chern)『網の幾何』(*Web geometry*), Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 1–8.

[15] チェカノフ，プシュカーリ(Yu. Chekanov, P. Pushkar′)『ルジャンドルリンクの波面の組み合わせ論とアーノルドの4予想』(*Combinatorics of fronts of Legendrian links, and Arnold's 4-conjectures*), Russian Math. Surveys **60** (2005), 95–149.

[16] コットン，フリーマン，グネップ，ヌグ，スピヴァック，ヨルダー(A. Cotton, D. Freeman, A. Gnepp, T. Ng, J. Spivak, C. Yolder)『ある特異曲面における等周問題』(*The isoperimetric problem in some singular surfaces*), J. Austral. Math. Soc. **78** (2005), 167–197.

[17] コンウェイ，ラガリアス(J. Conway, J. Lagarias)『ポリオミノでのタイル貼りと組み合わせ群論』(*Tiling with polyominoes and combinatorial group theory*), J. Combin. Theory Ser. **A 53** (1990), 183–208.

[18] コックス，カッツ(D. Cox, S. Katz)『ミラー対称性と代数幾何』(*Mirror symmetry and algebraic geometry*), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[19] ダルブー(G. Darboux)『解析幾何の原理』(*Principes de géométrie analytique*), Gautier-Villars, Paris, 1917.

[20] デーン(M. Dehn)『空間的に同じ多面体について』(*Über raumgleiche Polyeder*), Nachr. Acad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. (1900), 345–354.

[21] デーン(M. Dehn)『長方形の長方形への分解について』(*Über die Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke*), Math. Ann. **57** (1903), 314–332.

[22] デーン(M. Dehn)『数学者の精神性　性格描写』(*The mentality of the mathematician. A characterization*), Math. Intelligencer **5** (1983), no. 2, 18–26*1.

[23] ドグル，タバチニコフ(F. Dogru, S. Tabachnikov)『双対ビリヤード』(*Dual billiards*), Math. Intelligencer **27** (2005), no. 4, 18–25.

---

*1 [訳註]1928年1月18日にM. デーンがフランクフルト大学で行った講演記録を，A. シュニッツァーが英語に翻訳したもの.

[24] ダンカン，ダンカン(J.P. Duncan, J.L. Duncan)『折られた可展面』(*Folded developables*)，Proc. Roy. Soc. London Ser. A **383** (1982), 191–205.

[25] デュポン(J. Dupont)『鋏合同，群ホモロジー，特性類』(*Scissors congruences, group homology and characteristic classes*)，World Scientific, River Edge, NJ, 2001.

[26] ダイソン(F. Dyson)『捉え損なった機会』(*Missed opportunities*)，Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972), 635–652.

[27] エリアシュベルグ，ミシャチェフ(Ya. Eliashberg, N. Mishachev)『h 原理入門』(*Introduction to the h-principle*)，American Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[28] ファブリキウス=ビエール(F. Fabricius-Bjerre)『平面曲線の 2 重接線』(*On the double tangents of plane curves*)，Math. Scand. **11** (1962), 113–116.

[29] フェラン(E. Ferrand)『ベネクィン不変量と波面の幾何』(*On the Bennequin invariant and the geometry of wave fronts*)，Geom. Dedicata **65** (1997), 219–245.

[30] フライリング，リンネ(C. Freiling, D. Rinne)『相似な長方形で正方形をタイル貼りする』(*Tiling a square with similar rectangles*)，Math. Res. Lett. **1** (1994), 547–558.

[31] フックス，フックス(D. Fuchs, E. Fuchs)『正多面体上の閉測地線』(*Closed geodesics on regular polyhedra*)，Moscow Math. J. **7** (2007), 265–279.

[32] フックス，タバチニコフ(D. Fuchs, S. Tabachnikov)『さらに紙折りについて』(*More on paperfolding*)，Amer. Math. Monthly **106** (1999), 27–35.

[33] ゲリファント，カプラノフ，ゼレヴィンスキー(I. Gelfand, M. Kapranov, A. Zelevinsky)『判別式，終結式，高次元行列式』(*Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*)，Birkhauser, Boston, MA, 1994.

[34] ギブリン，ホルトン(P. Giblin, P. Holtom)『中心対称集合』(*The centre symmetry set*)，CAUSTICS '98 (Warsaw), 91–105, Banach Center Publ., **50**, Warsaw, 1999.

[35] ギンディキン(S. Gindikin)『物理学者と数学者の物語』(*Tales of physicists and mathematicians*)，Birkhauser, Boston, MA, 1988. 日本語訳がある．ギンディキン『ガウスが切り開いた道』『ガリレイの 17 世紀』(三浦伸夫訳)シュプリンガー・ジャパン(1996)，丸善出版(2012)．

[36] ギヴェンターリ(A. Givental)『静電ポテンシャルの多項式性』(*Polynomiality of electrostatic potential*)，Uspekhi Mat. Nauk **39** (1984), no.5, 253–254.

[37] グランヴィル(A. Granville)『2 項係数の算術的性質』(*Arithmetic properties of binomial coefficients*)，http://www.dms.umontreal.ca/~andrew/Binomial/.

[38] グリフィス，ハリス(P. Griffith, J. Harris)『ポンスレのポリズムのケイリーの明示的な解について』(*On Cayley's explicit solution of Poncelet's porism*)，l'Enseign. Math. **24** (1978), 31–40.

[39] グッゲンハイマー(H. Guggenheimer)『微分幾何学』(*Differential geometry*)，

Dover, New York, 1977.

[40] ハルパーン(B. Halpern)『2重接線に対する不等式』(*An inequality for double tangents*), Proc. Amer. Math. Soc. **76** (1979), 133–139.

[41] ハルパーン，ウィーヴァー(B. Halpern, C. Weaver)『等長はめ込みと等長埋めこみによる円柱の裏返し』(*Inverting a cylinder through isometric immersions and isometric embeddings*), Trans. Amer. Math. Soc. **230** (1977), 41–70.

[42] ヒルベルト，コーン-フォッセン(D. Hilbert, S. Cohn-Vossen)『直観幾何学』(*Geometry and the imagination*), Providence, RI, AMS Chelsea Publ., 1999. ドイツ語原本は1932年，英訳の初版は1952年．日本語訳がある．D. ヒルベルト，S. コーン-フォッセン『直観幾何学』(芹沢正三訳)みすず書房(1966).

[**43**] カポヴィッチ，ミルソン(M. Kapovich, J. Milson)『ユークリッド平面における多角形のモデュライ空間』(*On the moduli space of polygons in the Euclidean plane*), J. Differential Geom. **42** (1995), 430–464.

[44] カッツ(S. Katz)『数え上げ幾何学と弦理論』(*Enumerative geometry and string theory*), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[45] ケニョン(R. Kenyon)『凸多角形のタイル貼り』(*Tilings of convex polygons*), Ann. Inst. Fourier **47** (1997), 929–944.

[46] キング(J. King)『測度の探索における3問題』(*Three problems in search of a measure*), Amer. Math. Monthly **101** (1994), 609–628.

[47] コンハウザー，ヴェルマン，ワゴン(D. Konhauser, D. Velleman, S. Wagon)『自転車はどっちへ行った？　その他おもしろ数学ミステリー』(*Which way did the bicycle go?　And other intriguing mathematical mysteries*), MAA, Washington, 1996.

[**48**] ラガリアス，モウズ(J. Lagarias, D. Moews)『$\mathbb{R}^n$を充たす多面体と鋏合同』(*Polytopes that fill* $\mathbb{R}^n$ *and scissors congruence*), Discrete Comput. Geom. **13** (1995), 573–583.

[49] ラガリアス，リチャードソン(J. Lagarias, T. Richardson)『凸性と平面曲線の平均曲率』(*Convexity and the average curvature of plane curves*), Geom. Dedicata **67** (1997), 1–30.

[50] レイベンゾン(Z. Leibenzon)『ヤコビの恒等式とその一般化の証明のための単純な組み合わせ的方法』(*A simple combinatorial method for proving the Jacobi identity and its generalizations*), Funct. Anal. Appl. **20** (1986), no. 1, 66–68.

[**51**] レヴィ(M. Levi)『ガウス=ボネの定理の「自転車の車輪」証明』(*A "bicycle wheel" proof of the Gauss-Bonnet theorem*), Exposition. Math. **12** (1994), 145–164.

[**52**] レヴィ，タバチニコフ(M. Levi, S. Tabachnikov)『ポンスレ・グリッドと楕円の中のビリヤード』(*The Poncelet grid and the billiard in an ellipse*), Amer. Math. Monthly, **114** (2007), 895–908.

[53] マニン(Yu. Manin)『3次形式　代数，幾何，算術』(*Cubic forms. Algebra, geomery, arithmetic*), North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1986.

[54] ナザロフ，ペトロフ(A. Nazarov, F. Petrov)『S.L. タバチニコフ予想について』(*On S.L. Tabachnikov's conjecture*)，Algebra and Analysis, **19** (2007), 177–193.

[**55**] ニュートン(I. Newton)『自然哲学の数学的原理』(*Mathematical principles of natural philosophy*)，Univ. California Press, Berkeley, CA, 1999. 原著はラテン語で1687年に出版された．日本語訳がある．I. ニュートン『自然哲学の数学的諸原理』(河辺六男訳)中央公論社(1977)，I. ニュートン『プリンシピア』(中野猿人訳)講談社(1977)．

[56] オールズ(C.D. Olds)『連分数』(*Continued fractions*)，Random House, New York, 1963.

[57] オヴシエンコ，タバチニコフ(V. Ovsienko, S. Tabachnikov)『射影微分幾何学の今昔：シュワルツ微分から微分同相群のコホモロジーまで』(*Projective differential geometry, old and new: from Schwarzian derivative to cohomology of diffeomorphism groups*)，Cambridge Univ. Press, 2005.

[**58**] パク(I. Pak)『多面体的曲面を膨張させる』(*Inflating polyhedral surfaces*)，preprint.(to appear Math. Ann.)

[**59**] ペドー(D. Pedoe)『ユークリッド幾何における最も「初等的な」定理』(*The most "elementary" theorem of Euclidean geometry*)，Math. Mag. **49** (1976), 40–42.

[**60**] ペンローズ，ペンローズ(L. Penrose, R. Penrose)『クリスマスのためのパズル』(*Puzzles for Christmas*)，New Scientist. 25 December 1958, 1580–1581, 1597.

[61] ポゴレーロフ(A. Pogorelov)『ヒルベルトの第4問題』(*Hilbert's fourth problem*)，J. Wiley & Sons, 1979.

[62] ポーヤ(G. Polya)『数学における帰納と類比　数学と信頼できる推論』(*Induction and analogy in mathematics. Mathematics and plausible reasoning*)，vol. I. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1954. 日本語訳がある．G. ポリア『数学の発見はいかになされるか1帰納と類比』(柴垣和三雄訳)丸善(1959)．

[**63**] ポールレザエイ(K. Poorrezaei)『グレイヴズの定理の2つの証明』(*Two proofs of Graves's theorem*)，Amer. Math. Monthly **110** (2003), 826–830.

[64] プラソロフ(V. Prasolov)『多項式』(*Polynomials*)，Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[**65**] プロップ(J. Propp)『コンウェイの方法へのゆったり歩きのアプローチ，または二都物語』(*A pedestrian approach to a method of Conway, or, A tale of two cities*)，Math. Mag. **70** (1997), 327–340.

[**66**] サビトフ(I. Sabitov)『多面体の計量不変量としての体積』(*The volume as a metric invariant of polyhedra*)，Discrete Comput. Geom. **20** (1998), 405–425.

[**67**] サー(C. Sah)『ヒルベルトの第3問題：鋏合同』(*Hilbert's third problem: scissors congruence*)，Research Notes in Mathematics, 33. Pitman, Boston-London, 1979.

[68] シェーンベルク，ザレンバ(I. Schoenberg, S. Zaremba)『凸多面体に関するコーシーの補題』(*On Cauchy's lemma concerning convex polygons*)，Canad. J. Math. **19** (1967), 1062-1071.

[**69**] シュラム(O. Schramm)『卵を鳥かごに入れる方法』(*How to cage an egg*)，Invent. Math. **107** (1992), 543-560.

[**70**] シュワルツ(R. Schwartz)『ポンスレのグリッド』(*The Poncelet grid*)，Advances in Geometry **7** (2007), 157-175.

[71] セグレ(B. Segre)『非特異3次曲面』(*The non-singular cubic surfaces*)，Oxford University Press, Oxford, 1942.

[72] ソシンスキー(A. Sossinsky)『結び目：捻りのきいた数学』(*Knots: Mathematics with a twist*)，Harvard University Press, Cambridge, MA, 2002.

[73] スタンリー(R. Stanley)『数え上げ組み合わせ論』(*Enumerative Combinatorics*)，vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[74] スタンリー(R. Stanley)『カタラン補遺』(*Catalan Addendum*)，http://www-math.mit.edu/rstan/ec/catadd.pdf.

[**75**] スタイン，サボー(S. Stein, S. Szabó)『代数とタイル貼り』(*Algebra and tiling*)，Washington, DC, MAA, 1994.

[**76**] シドラー(J.-P. Sydler)『3次元ユークリッド空間の多面体の同値性のための必要十分条件』(*Conditions nécessaires et suffisantes pour l'equivalence des polyèdres de le'espace euclidien à trois dimension*)，Comment. Math. Helv. **40** (1965), 43-80.

[77] セゲー(G. Szegö)『指数級数のある特性について』(*Über eine Eigenschaft der Exponentialreihe*)，Sitzungsber. Berl. Math. Ges., **23** (1924), 50-64.

[**78**] タバチニコフ(S. Tabachnikov)『ビリヤード』(*Billiards*)，Soc. Math. France, "Panoramas et Syntheses", No. 1, 1995.

[79] タバチニコフ(S. Tabachnikov)『4頂点定理再論—古いテーマの2つの変形』(*The four vertex theorem revisited — two variations on the old theme*)，Amer. Math. Monthly **102** (1995), 912-916.

[**80**] タバチニコフ(S. Tabachnikov)『円錐の裏返し』(*A cone eversion*)，Amer. Math. Monthly **102** (1995), 52-56.

[**81**] タバチニコフ(S. Tabachnikov)『円周の中へ：マネー=クーツの定理の変形』(*Going in circles: variations on the Money-Coutts theorem*)，Geom Dedicata **80** (2000), 201-209.

[82] タバチニコフ(S. Tabachnikov)『歪みループと歪みブレーンと2次超曲面について』(*On skew loops, skew branes and quadratic hypersurfaces*)，Moscow Math. J. **3** (2003), 681-690.

[**83**] タバチニコフ(S. Tabachnikov)『幾何とビリヤード』(*Geometry and billiards*)，Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2005.

[**84**] トルベツコイ(S. Troubetzkoy)『円周と多角形』(*Circles and polygons*)，Geom. Dedicata **80** (2000), 289-296.

[85] サーストン(W. Thurston)『コンウェイのタイル貼り群』(*Conway's tiling groups*), Amer. Math. Monthly **97** (1990), 757–773.

[86] ティレル，パウエル(J. Tyrrell, M. Powell)『円周幾何学の一定理』(*A theorem in circle geometry*), Bull. London Math. Soc. **3** (1971), 70–74.

[87] ワゴン(S. Wagon)『長方形のタイル貼りに関するある結果の14の証明』(*Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle*), Amer. Math. Monthly **94** (1987), 601–617.

[88] ヴァンナー(G. Wanner)『クラメール=カスティロン問題とウルグハルトの「最も初等的な」定理』(*The Cramer–Castillon problem and Urguhart's 'most elementary' theorem*), Elem. Math. **61** (2006), 58–64.

[89] ヴァイナー(J. Weiner)『球面曲線の大域的性質』(*Global properties of spherical curves*), J. Diff. Geom. **12** (1977), 425–438.

[90] ウィルフォード(J. Wilford)『地図製作者』(*The mapmakers*), Vintage, 2001.

[91] ヤンデル(B. Yandell)『名誉のクラス：ヒルベルトの問題とその解決者』(*The honors class: Hilbert's problems and their solvers*), A.K. Peters, 2001.

[92] ザルガラー，ロス(V. Zalgaller, G. Los')『マルファッティ問題の解法』(*Solution of the Malfatti problem*), J. Math. Sci. **72** (1994), 3163–3177.

[93] ブラウダー編(F. Browder, ed.)『ヒルベルトの問題から生まれた数学の発展』(*Mathematical developments arising from Hilbert's problems*), Proc. Symp. Pure Math., **XXVIII** (1976).

[94] 『裏返し：球面の裏返しに関するビデオ』(*Outside in: A video about turning the sphere inside out*), The Geometry Center, University of MN, A.K. Peters, 1994.

索　引

ア 行

カ 行

サ 行

タ 行

ナ 行

ハ 行

マ 行

ヤ 行

ラ 行

ワ 行

D. フックス (Dmitry Fuchs)
University of California, Davis

S. タバチニコフ (Serge Tabachnikov)
Pennsylvania State University

蟹江幸博
三重大学教育学部教授.
著書に『微分のはなし』『積分と微分のはなし』(日本評論社),『文明開化の数学と物理』(共著, 岩波書店), 訳書に『解析教程』『天書の証明』『古典群』(丸善出版),『黄金分割』『シンメトリー』(日本評論社),『直線と曲線ハンディブック』(共訳, 共立出版),『古典力学の数学的方法』(共訳, 岩波書店)ほか.

本格数学練習帳 3
ヒルベルトの忘れられた問題
D. フックス, S. タバチニコフ

2013 年 3 月 28 日　第 1 刷発行

訳　者　蟹江幸博(かにえ ゆきひろ)

発行者　山口昭男

発行所　株式会社 岩波書店
〒101-8002 東京都千代田区一ツ橋 2-5-5
電話案内 03-5210-4000
http://www.iwanami.co.jp/

印刷・製本／法令印刷

ISBN 978-4-00-006737-9　　Printed in Japan